поступаем в вуз

математика

Е. Шикин
А. Григорян
Г. Шикина

сначала немного подумайте

БИНОМ

Е. Шикин
А. Григорян
Г. Шикина

сначала немного подумайте

Пособие по математике
для абитуриентов

Под редакцией Е. Шикина

2-е издание (электронное)

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2015

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1
Ш57

Серия основана в 2005 г.

Шикин Е. В.

Ш57 Сначала немного подумайте [Электронный ресурс] : пособие по математике для абитуриентов / Е. В. Шикин, А. А. Григорян, Г. Е. Шикина ; под ред. Е. В. Шикина. — 2-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 336 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — (Поступаем в вуз). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2816-1

Основная цель учебного пособия — подготовить абитуриентов к письменному вступительному экзамену по математике на гуманитарных факультетах вузов. Авторы отобрали необходимые задачи и предложили приемы их решения. Пособие заканчивается справочником формул и терминов. В пособии обобщен опыт преподавания математики на подготовительных курсах и в лицее при факультете государственного управления МГУ им. М. В. Ломоносова.

Для абитуриентов, учащихся старших классов, учителей.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Сначала немного подумайте : пособие по математике для абитуриентов / Е. В. Шикин, А. А. Григорян, Г. Е. Шикина ; под ред. Е. В. Шикина. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 333 с. : ил. — (Поступаем в вуз). — ISBN 5-94774-243-8.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

ISBN 978-5-9963-2816-1 © БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005

ВСТУПЛЕНИЕ

гуманитариям, заворожённым математическими тайнами

В последние годы высшая школа всё большее внимание уделяет математической составляющей образования *сугубых гуманитариев.*

В некоторых университетах на первом или втором году обучения стали читать учебные курсы по математике. Кое-где экзамен по математике уже входит в число вступительных экзаменов. Это, разумеется, требует от абитуриентов соответствующей предварительной подготовки. Помочь им в этом — основная цель предлагаемого пособия.

Следует сразу же признать, что пособий по математике для абитуриентов выпущено довольно много. Есть среди них весьма качественные и хорошо подготовленные. Правда, адресованы они в основном абитуриентам, готовящимся к поступлению на естественные, инженерно-технические и экономические факультеты и специальности. Это определяет довольно высокий уровень разбираемых в них задач — уровень, на который при благоприятном стечении обстоятельств такое пособие способно выводить настойчивого абитуриента.

Авторы предлагаемого пособия ставят перед собой более скромную цель — подготовить к вступительному экзамену по математике (письменно) на те гуманитарные факультеты и специальности, при обучении на которых математике отводится не так много часов и где, следовательно, требования к математической подготовке абитуриентов менее *жёсткие.* Вместе с тем, положение дел при поступлении сейчас таково, что навыков, полученных в средней школе, явно мало. Чтобы убедиться в этом, достаточно познакомиться с публикуемыми в печати вариантами задач вступительных экзаменов. Кроме того, не следует забывать, что хорошая математическая подготовка — это возможность не только преодоления вступительной планки, но и успешности последующего обучения в высшей школе выдержавших вступительные испытания.

Основываясь на высказанных соображениях, авторы провели отбор необходимого материала и сформировали методику его изложения. Предлагаемые задачи призваны показать читателю основные подходы к решению задач по элементарной математике, а выбранный способ описания — овладеть этими подходами.

Несколько слов о структуре пособия.

Материал, излагаемый в пособии, естественным образом разделяется на две части. Первая часть состоит из тематических разделов, в каждом из которых описаны приёмы решения соответствующих примеров и задач. Во второй части к каждому из этих разделов подобраны примеры и задачи для самостоятельного решения (с ответами). Там же помещён краткий справочник, в котором в качестве напоминания приведены используемые формулы и факты и объяснены встречающиеся в пособии понятия, а также высказаны некоторые рекомендации для тех, кто впервые будет держать (сдавать) письменный экзамен по математике.

ЧЕМ ХОРОШ ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

Горячая пора вступительных экзаменов в высшие учебные заведения наступит уже совсем скоро. И вот вы вдруг обнаруживаете, что один из экзаменов, являющихся предтечей обучения по выбранному вами направлению или интересующей вас специальности, — это экзамен по математике. Если подобное известие напугало вас, то читайте эту книжку.

Итак, мы обращаемся к Вам, заинтересованный читатель.

В последние годы планка вступительных экзаменов по математике заметно приподнялась над набором математических сведений и навыков, предоставляемых школой. Интересно отметить, что при этом ни сама школьная программа, ни программа по математике для поступающих сколько-нибудь существенных изменений не претерпели. Основная интрига здесь строится на том, насколько глубоко и основательно усвоены соответствующие понятия и выработаны ли необходимые навыки по действенному их применению в процессе поиска решений вполне конкретных задач. Иными словами, речь идёт о добротном усвоении набора сведений из элементарной математики, причём набора не слишком большого.

Вступительный экзамен по математике проводится обычно в двух формах — письменной и устной. Если вам предстоит держать не устный, а письменный экзамен, считайте, что вам повезло. Всё дело в том, что письменный экзамен по математике, в отличие от устного экзамена, для абитуриента более благоприятен.

Попробуем это объяснить.

За время, отведённое на письменный экзамен (одинаковое для всех), нужно показать свои успехи в решении предложенных задач (как правило, почти одинаковых для всех). Конечно, справиться с волнением пишущему первый раз трудно. Однако всё время, отпущенное на письменный экзамен, абитуриент оказывается предоставленным самому себе, и субъективный фактор (влияние принимающего экзамен преподавателя), избежать который на устном экзамене практически невозможно, здесь почти отсутствует. И в этом смысле письменный экзамен является более гуманным, нежели экзамен устный. К тому же преподаватели, проверяющие письменную работу, все не до конца ясные места в её тексте обычно толкуют в пользу абитуриента. Возможность задавать на устном экзамене дополнительные вопросы экзаменуемому ставит его в положение менее выгодное, по сравнению со сдающим экзамен письменный — уровень строгости неожиданно может оказаться заметно более высоким, чем тот, что был в школе (школы-то разные).

Выстраивая решение задачи, пишущий экзамен по математике может наблюдать за результатами своих действий шаг за шагом и, значит, как-то себя контролировать. Во всяком случае, на письменном экзамене *слово, как воробей, не вылетит*. Это важное свойство также скорее помогает, нежели мешает абитуриенту.

Есть ещё одно немаловажное обстоятельство — содержательное наполнение экзаменационного задания. Как правило, подбор задач и их уровень довольно тесно связаны с теми математическими курсами, которые предстоит прослушать успешно выдержавшим вступительные экзамены и принятым в университет.

Письменный экзамен является наиболее простым способом проверки того, насколько глубоко абитуриент изучил курс школьной математики и насколько хорошо ему удалось сохранить и углубить полученные знания.

Сейчас многие факультеты публикуют варианты вступительных экзаменов прошлых лет. И это очень удобно — по содержащимся в них задачам можно без особого труда определить тот уровень требований к математической подготовке поступающего, достижение которого позволит ему успешно выдержать предлагаемое испытание. Конечно, год от года этот уровень изменяется, но изменяется мало. Поэтому достаточно отобрать задачи соответствующего уровня и аккуратно их прорешать. Разумеется, с преподавателем сделать подобный отбор проще. Самостоятельно это много труднее. Именно в этом состоит одна из причин, из-за которой авторы взялись за написание пособия для поступающих на гуманитарные факультеты.

Дело в том, что из пособий, адресованных абитуриентам, готовящимся к поступлению на естественнонаучные, инженерно-технические и экономические специальности, сделать нужную выборку не всегда просто. Уровень разбираемых в них задач, как правило, довольно высок, и выделить из них задачи не самые сложные неискушенному человеку совсем нелегко. Да и само изложение в таких пособиях, нацеленное на соответствующий достаточно высокий уровень заданий, накладывает на пользователя пособием повышенные требования.

В предлагаемое пособие помещены простые задачи с простыми решениями и с простыми (по возможности) объяснениями предложенных решений. При этом выработки внимания и аккуратности при поиске решения задач, иными словами — умения избежать досадных (иначе — глупых) ошибок, которого можно достичь на разборе несложных задач, оказывается достаточно не только для преодоления планки вступительного экзамена, но и для овладения математически окрашенным материалом в процессе последующего обучения в университете.

О последнем желающий поступить во время экзаменов чаще всего не задумывается, а зря. Ведь поступает-то он для того, чтобы учиться.

Итак, подготовка к сдаче вступительного экзамена по математике должна заключаться в том, чтобы:

1) возобновить и сохранить в памяти известную связку фактов и формул;
2) научиться эффективно применять их в решении разных задач.

Цель предлагаемого пособия — научить абитуриентов аккуратно и без ошибок решать не очень трудные и даже совсем простые задачи.

Наши многолетние наблюдения, полученные при проверке письменных работ вступительных экзаменов, показывают, что весьма часто невысокие баллы выставляются не за то, что задачи не решены, — в большинстве работ задачи с какими-то решениями предъявлены. Но дело в том, что нередко предъявленные решения оказываются неверными. Во время показа работ абитуриентам после их проверки они, как правило, легко соглашаются с тем, что при написании работы он(а) допустил(а) ошибку (досадную, глупую, арифметическую).

А у сумевших избежать подобного рода ошибки — результаты хорошие.

Основная ошибка абитуриента — торопливость, которая проявляется в том, что, едва прочитав условие задачи, он(а) мгновенно приступает к её решению. А ведь сначала неплохо хотя бы некоторое время внимательно посмотреть на задачу и немного подумать. Подумать — это очень полезно.

Вот лишь некоторые примеры часто встречающихся ошибок, которые возникают по причине именно торопливости.

Пример 1. Найти все значения неизвестной, подчиняющиеся неравенству

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{2}\,.$$

Типичная ошибка — приведение к общему знаменателю с одновременным его отбрасыванием,

$$2 < x,$$

приводит к потере части решений

$$x < 0.$$

Пояснение: при умножении обеих частей неравенства на число необходимо непременно знать знак этого числа — в данном случае знаменатель дроби в левой части исходного неравенства может быть как положительным, так и отрицательным.

Пример 2. Найти все значения неизвестной, подчиняющиеся уравнению

$$\sqrt{x} + x = 0.$$

Типичная ошибка — возведение в квадрат соотношения

$$\sqrt{x} = -x$$

приводит к уравнению

$$x = x^2,$$

один из корней которого

$$x = 1$$

является лишним.

Пояснение: лишний корень отбрасывается в результате проверки — подстановки найденных значений неизвестной в исходное уравнение.

Пример 3. Найти все решения уравнения

$$ax = 0.$$

Типичная ошибка — деление обеих частей уравнения на a приводит к формуле

$$x = 0.$$

И целый пласт решений — при $a = 0$ неизвестная x может принимать любые значения — теряется.

Пояснение: при поиске решений заданного уравнения следует исходить из того, что, в принципе, каждая величина, входящая в уравнение, может принимать любое значение.

Ещё раз повторим — не стоит сразу бездумно «набрасываться» на задачу, напротив — разумно приступать к её решению, немного подумав.

О том, как именно следует поступать во время написания работы по математике на вступительных экзаменах, мы поговорим в конце пособия.

Глава 1

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Для успешного решения задач, содержащих **абсолютную величину**, необходимо прежде всего хорошо понимать основное определение и уметь его применять.

Напомним, что *абсолютной величиной* числа, или иначе — его *модулем*, называется само это число (в случае, если заданное число положительно или равно нулю) или число, ему противоположное (если заданное число отрицательно):

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Так $|5| = 5$, а $|-3| = 3$.

Из данного определения следует, в частности, что модуль любого числа *неотрицателен*.

Абсолютная величина числа имеет ясный геометрический смысл (кстати, нередко весьма полезный к применению):

$|x|$ — это *расстояние от точки* x на числовой прямой до *начала отсчёта* — точки O (рис. 1.1).

Рис. 1.1

Таким образом, уравнение

$$|x| = a,$$

где a — положительное число, всегда имеет два решения:

$$x = a \qquad \text{и} \qquad x = -a.$$

Если же a — отрицательное число, то уравнение

$$|x| = a$$

решений не имеет.

При $a = 0$ решение только одно: $x = 0$.

Абсолютная величина числа обладает целым рядом полезных свойств, применение которых часто существенно облегчает решение задач. Вот лишь некоторые из них:

$$|-x| = |x|;$$
$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$$

неравенство

$$|x| < a$$

при положительном a равносильно соотношению

$$-a < x < a$$

(рис. 1.2);

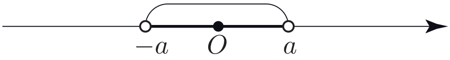


Рис. 1.2

неравенство

$$|x| \leqslant a$$

при неотрицательном a равносильно соотношению

$$-a \leqslant x \leqslant a;$$

неравенство

$$|x| > a$$

при положительном a равносильно двум соотношениям:

$$\left[\begin{array}{l} x < -a, \\ x > a, \end{array}\right.$$

что можно описать и по-иному:
либо

$$x < -a,$$

либо

$$x > a$$

(рис. 1.3); если же $a < 0$, то x — любое число;

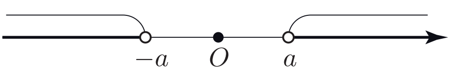


Рис. 1.3

неравенство
$$|x| \geqslant a$$
при положительном a равносильно двум соотношениям
$$\left[\begin{array}{l} x \leqslant -a, \\ x \geqslant a, \end{array}\right.$$
если же $a \leqslant 0$, то x — любое число;
$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Если под знаком модуля расположено более сложное выражение, например,
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если} \quad f(x) < 0, \end{cases}$$
то уравнение
$$|f(x)| = a,$$
где a — положительное число, равносильно совокупности уравнений
$$\left[\begin{array}{l} f(x) = -a, \\ f(x) = a. \end{array}\right.$$

Опишем общий метод решения уравнений и неравенств, содержащих одно или несколько выражений вида $|x - b|$.

На числовой оси отмечаются те значения неизвестной x, при которых все такие выражения обращаются в нуль. Указанные числа разбивают числовую ось на части, в каждой из которых все выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют свой знак. Пользуясь затем определением модуля, мы ищем решения исходной задачи в каждой из полученных частей отдельно. В некоторых из этих частей решений может не быть вовсе, в других — решений может быть много, даже бесконечно много. Объединение всех найденных значений неизвестной и будет решением заданного уравнения или неравенства.

Начнём с простого примера.

Пример 1. Решите уравнение
$$|x - 3| = 2.$$

Выражение, стоящее под знаком модуля, обращается в нуль при

$$x = 3.$$

Отметим его на рисунке (рис. 1.4).

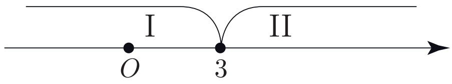


Рис. 1.4

Эта точка разбивает всю числовую ось на две части:

$$\text{I:} \quad x < 3 \qquad \text{и} \qquad \text{II:} \quad x \geqslant 3.$$

В области I

$$x - 3 < 0.$$

Поэтому в этой области заданное уравнение можно записать так:

$$-(x - 3) = 2.$$

Отсюда

$$-x + 3 = 2,$$

и далее

$$x = 1.$$

Нетрудно убедиться в том, что найденное значение $x = 1$ лежит в области I.

В области II

$$x - 3 \geqslant 0.$$

Поэтому исходное уравнение в этой области принимает несколько иной вид

$$x - 3 = 2,$$

откуда вытекает, что

$$x = 5.$$

Найденное значение $x = 5$ лежит в области II, где мы и искали решение.

Итак, просмотрев все точки числовой оси, мы нашли, что только две из них

$$x = 1 \qquad \text{и} \qquad x = 5$$

обращают заданное уравнение в тождество.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Важное замечание. Выражение

$$x - b$$

отрицательно слева от точки b и положительно справа от этой точки (рис. 1.5). Запомним это свойство, с тем чтобы пользоваться им в дальнейшем.

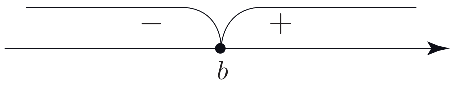


Рис. 1.5

Пример 2. Найдите решения уравнения

$$|x - 2| = |x + 4|.$$

Первое выражение обращается в нуль при

$$x = 2,$$

а второе при

$$x = -4.$$

Отметим эти числа на рисунке (рис. 1.6). В результате такого построения числовая ось разобьется на три части (рис. 1.7):

Рис. 1.6

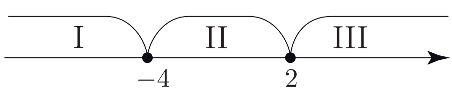


Рис. 1.7

область I: $x < -4$,
область II: $-4 \leqslant x < 2$,
область III: $2 \leqslant x$.

Решение заданного уравнения будем искать в каждой из этих трёх частей.

Начнём с области I. Здесь оба выражения, и $x-2$, и $x+4$, отрицательны. Поэтому

$$-(x-2)=-(x+4),$$

или, что то же,

$$-x+2=-x-4.$$

Отсюда

$$6=0,$$

что, разумеется, невозможно. Поэтому в области I данное уравнение решений не имеет.

Переходим к области II,

$$-4\leqslant x<2.$$

Здесь

$$x+4\geqslant 0,$$

в то время как

$$x-2<0.$$

Поэтому, отбрасывая знаки модуля, получаем, что

$$-(x-2)=x+4,$$

откуда

$$-x+2=x+4.$$

Далее

$$2x=-2.$$

и наконец

$$x=-1.$$

Нетрудно заметить, что найденное значение неизвестной принадлежит рассматриваемой области II.

В области III оба выражения, и $x-2$, и $x+4$, положительны, что позволяет записать в ней исходное уравнение так

$$x-2=x+4,$$

откуда

$$0=6.$$

Вследствие того, что последнее равенство не выполняется никогда, заключаем, что в области III решений заданного уравнения нет.

Мы просмотрели все три части, на которые числа -4 и 2 разбивают числовую ось, и только в одной из них (во II-й) нашли значение неизвестной, которое обращает заданное уравнение в тождество. Таким образом, ответ в этом примере такой: $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Замечание. Выражение

$$|x - b|$$

имеет полезный геометрический смысл — это расстояние между точками x и b на числовой оси. Если воспользоваться этим обстоятельством, то только что рассмотренную задачу можно переформулировать так: на числовой оси найти точку x, которая находится от точек -4 и 2 на одинаковом расстоянии. Ясно, что это точка $x = -1$.

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 3. Решите уравнение

$$|x - 1| + |2 - x| + |2x - 8| = 10.$$

Сразу отметим, что, пользуясь свойствами модуля, всегда можно перейти к равносильному уравнению, в котором неизвестная в каждом из выражений, расположенных за знаками модуля, будет стоять первой. В данном случае это будет выглядеть так

$$|x - 1| + |x - 2| + 2|x - 4| = 10.$$

Предложенный приём облегчает разрешение вопроса о знаках выражений, располагающихся под знаком модуля, в тех областях, на которые разбивают числовую ось числа, обращающие в нуль эти выражения (в данном случае это числа 1, 2 и 4) (рис. 1.8).

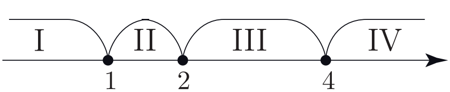


Рис. 1.8

Легко видеть, что теперь во всех построенных областях, которые расположены слева от чисел 1, 2 и 4, соответствующие им выражения $x - 1$, $x - 2$ и $x - 4$ отрицательны, а справа от этих чисел— соответственно положительны.

Тем самым, для решения задачи нам необходимо рассмотреть четыре случая.

Область I: $x < 1$.

В этой области

$$-x + 1 - x + 2 - 2x + 8 = 10,$$

откуда

$$-4x = -1$$

и далее

$$x = \frac{1}{4}\,.$$

Поскольку

$$\frac{1}{4} < 1,$$

найденное значение неизвестной принадлежит области I и, значит, является решением исходного уравнения.

Область II: $1 \leqslant x < 2$.

Имеем

$$x - 1 - x + 2 - 2x + 8 = 10.$$

Отсюда

$$-2x = 1,$$

и

$$x = -\frac{1}{2}\,.$$

Найденное значение неизвестной не подчиняется условиям, наложенным на x в области II,

$$-\frac{1}{2} < 1,$$

и его следует отбросить.

Область III: $2 \leqslant x < 4$.

Здесь

$$x - 1 + x - 2 - 2x + 8 = 10.$$

Из того, что равенство

$$0 = 5$$

невозможно, можно сделать следующий вывод — в области III исходное уравнение решений не имеет.

Область IV: $4 \leqslant x$.

Здесь
$$x - 1 + x - 2 + 2x - 8 = 10,$$
откуда
$$4x = 21$$
и
$$x = \frac{21}{4}\,.$$

Найденное значение неизвестной больше 4 и, следовательно, лежит в области IV.

Ответ:
$$x_1 = \frac{1}{4}\,, \quad x_2 = \frac{21}{4}\,.$$

Пример 4 (географический факультет МГУ, 1997). Решите неравенство
$$\frac{|x-1|+10}{4|x-1|+3} > 2.$$

Прежде чем *раскрывать модуль*, стоит умножить обе части неравенства на знаменатель дроби, который, как нетрудно заметить, строго больше нуля при любом значении неизвестной x. Имеем
$$|x-1| + 10 > 8|x-1| + 6.$$

Теперь можно рассматривать отдельные случаи.

Случай 1. Если $x < 1$, то
$$-x + 1 + 10 > -8x + 8 + 6.$$
Отсюда
$$7x > 3$$
и
$$x > \frac{3}{7}\,.$$

Из всех найденных значений неизвестной следует оставить только те, которые подчиняются условию $x < 1$ (рис. 1.9). В результате получаем
$$\frac{3}{7} < x < 1.$$

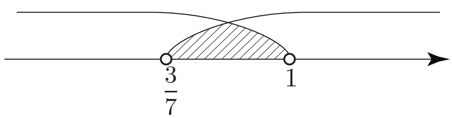


Рис. 1.9

Случай 2. Если $x \geqslant 1$, то

$$x - 1 + 10 > 8x - 8 + 6,$$

откуда

$$-7x > -11$$

и

$$x < \frac{11}{7}\,.$$

Из всех найденных значений неизвестной оставляем только те, которые подчиняются условию $x \geqslant 1$ (рис. 1.10). В результате получаем

$$1 \leqslant x < \frac{11}{7}\,.$$

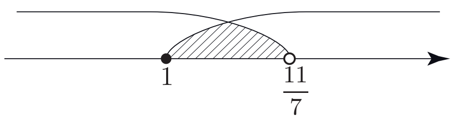


Рис. 1.10

Объединяя неравенства

$$\frac{3}{7} < x < 1$$

и

$$1 \leqslant x < \frac{11}{7}\,,$$

находим все решения исходной задачи

$$\frac{3}{7} < x < \frac{11}{7}\,.$$

Ответ:

$$\frac{3}{7} < x < \frac{11}{7}\,.$$

Замечание. Нетрудно заметить, что, получив неравенство

$$|x-1|+10>8|x-1|+6,$$

можно не торопиться с отбрасыванием знаков абсолютной величины, а сначала упростить его, приведя подобные члены. В результате получим, что

$$|x-1|<\frac{4}{7}\,.$$

Это неравенство равносильно соотношению

$$-\frac{4}{7}<x-1<\frac{4}{7}\,,$$

из которого совсем просто следует тот же ответ

$$\frac{3}{7}<x<\frac{11}{7}\,.$$

В случае, когда под знаком модуля располагаются более сложные выражения, наряду с описанным выше подходом можно использовать и другие приёмы.

Пример 5. Решите уравнение

$$3|x^2-2x-1|=5x+1.$$

Нетрудно видеть, что корни уравнения

$$x^2-2x-1=0$$

иррациональны. Поэтому после раскрытия модуля в областях, где знак выражения

$$x^2-2x-1$$

не меняется, может возникнуть проблема сравнения чисел (напомним, что значения неизвестной, получаемые в ходе решения, непременно нужно проверять на принадлежность к той области изменения неизвестной, где в данный момент идёт поиск решений). Иногда провести такое сравнение нетрудно, а иногда необходимость сравнения чисел приводит к достаточно сложным вычислениям.

Конечно, сложных вычислений хотелось бы избежать, что в принципе возможно, если, например, просто перейти к совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 3(x^2-2x-1)=5x+1, \\ 3(x^2-2x-1)=-(5x+1). \end{array}\right.$$

Однако поскольку исходное уравнение имеет решения только при тех значениях x, при которых правая часть уравнения неотрицательна, выписанная совокупность равносильной ему не будет.

Замечание. При неосторожном переходе мы часто приобретаем посторонние решения, и поэтому требуется дополнительная работа по проверке всех полученных корней путём подстановки каждого из них в исходное уравнение. Иногда подобная проверка полученных значений неизвестной оказывается совсем непростой. Правда, в данном случае это не так.

Опишем два из возможных подходов к решению сформулированной задачи.

Способ 1 (с последующей проверкой). Первое уравнение из предложенной совокупности уравнений легко преобразуется к уравнению

$$3x^2-11x-4=0.$$

Вот его решения —

$$x_1=-\frac{1}{3}, \qquad x_2=4.$$

Второе уравнение можно записать так

$$3x^2-x-2=0,$$

а это его корни —

$$x_3=-\frac{2}{3}, \qquad x_4=1.$$

Последовательно подставляя найденные значения неизвестной в исходное уравнение, получаем, что оба дробных корня являются посторонними.

Тем самым, заданное уравнение имеет два решения

$$x=1 \quad \text{и} \quad x=4.$$

Способ 2 (без проверки). Переход от исходного уравнения к совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 5x+1 \geqslant 0, \\ 3(x^2-2x-1) = 5x+1; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} 5x+1 \geqslant 0, \\ 3(x^2-2x-1) = -(5x+1), \end{array}\right. \end{array}\right.$$

является равносильным.

После несложных преобразований получаем

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{1}{5}, \\ 3x^2-6x-3 = 5x+1; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{1}{5}, \\ 3x^2-6x-3 = -5x-1. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{1}{5}, \\ 3x^2-11x-4 = 0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{1}{5}, \\ 3x^2-x-2 = 0, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

и далее

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{1}{5}, \\ x = 4, x = -\dfrac{1}{3}; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{1}{5}, \\ x = 1, x = -\dfrac{2}{3}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

В итоге получаем

$$\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Вы можете сами выбрать, какой из предложенных способов (приводящих к одному и тому же правильному набору решений) является для вас наиболее предпочтительным.

Пример 6 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 2001). Решите уравнение

$$|x^2 + 10x + 16| = |x^2 - 16|.$$

Данное уравнение можно решить, разбивая всю числовую ось на области знакопостоянства выражений, расположенных под знаком модуля. Но, как нетрудно заметить, таких областей будет довольно много (пять).

Попробуем избежать в этом примере утомительных вычислений.

Возведём обе части уравнения в квадрат. Эта операция не приведёт к появлению лишних корней, так как оба выражения, расположенные в исходном уравнении и слева, и справа, всегда неотрицательны.

В результате возведения в квадрат получим

$$(x^2 + 10x + 16)^2 = (x^2 - 16)^2,$$

или, что то же,

$$(x^2 + 10x + 16)^2 - (x^2 - 16)^2 = 0.$$

Воспользовавшись формулой для разложения разности квадратов

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

приходим к уравнению

$$(x^2 + 10x + 16 + x^2 - 16)(x^2 + 10x + 16 - x^2 + 16) = 0,$$

упрощая которое, получим, что

$$(2x^2 + 10x)(10x + 32) = 0.$$

Приравнивая к нулю каждый из сомножителей, находим значения неизвестной.

Ответ: $x_1 = -5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3{,}2$.

Изложенный нами общий метод решения уравнений и неравенств с модулями весьма эффективен. Однако следует знать и другие способы решения подобных задач, способы, которые могут существенно упростить поиск решения (а значит, уменьшить опасность арифметических ошибок), и уметь ими пользоваться. В целом ряде случаев оказывается, что основной метод, опирающийся на разбиение числовой оси на области знакопостоянства выражений, схваченных знаками модуля, технически неосуществим, и потому при решении таких задач мы просто вынуждены искать иные подходы.

Пример 7. Найдите все решения неравенства

$$|x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3| < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3.$$

Здесь успешный поиск чисел, обращающих в нуль выражение, стоящее под знаком модуля, не представляется возможным. Однако, воспользовавшись одним из свойств модуля, мы можем перейти к равносильному соотношению

$$-(x^7+4x^5-x^2-2x+3)<x^7+4x^5+x^2+2x-3<x^7+4x^5-x^2-2x+3,$$

найти все решения которого уже достаточно просто.

Выписанное соотношение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} -(x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3) < x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3, \\ \quad x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3 < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3. \end{cases}$$

После очевидных упрощений приходим к системе

$$\begin{cases} -x^7 - 4x^5 + x^2 + 2x - 3 < x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3, \\ \quad x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3 < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} x^7 + 4x^5 > 0, \\ x^2 + 2x - 3 < 0. \end{cases}$$

Решая каждое из этих неравенств, получим соответственно

$$\begin{cases} x > 0, \\ -3 < x < 1. \end{cases}$$

В результате имеем

$$0 < x < 1$$

(рис. 1.11).

Ответ: $0 < x < 1$.

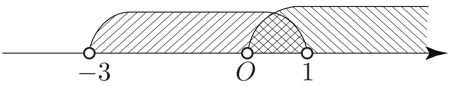


Рис. 1.11

Пожелание. Не нужно слишком бояться громоздких выражений — слово *громоздкий* далеко не всегда является синонимом слова *трудный*.

Пример 8 (Черноморский филиал МГУ, 2000). Найдите все решения неравенства

$$||3x^2+5x|-2| \geqslant 3x^2-5x+4.$$

Если решать это неравенство методом последовательного раскрытия модулей, то начинать нужно с внутреннего $|3x^2+5x|$, отметив на оси точки 0 и $-5/3$, где $3x^2+5x$ обращается в нуль. Затем в каждой из трёх полученных областей придётся решать проблему раскрытия внешнего модуля. И хотя описанные действия достаточно утомительны, всем этим пришлось бы заниматься, если бы не было приёма, при помощи которого была решена предыдущая задача.

Начнём с того, что квадратный трёхчлен в правой части заданного неравенства всегда положителен — его дискриминант

$$D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4$$

отрицателен, а коэффициент при x^2 положителен.

Поэтому последнее неравенство равносильно совокупности двух неравенств

$$\left[\begin{cases} |3x^2+5x|-2 \geqslant 3x^2-5x+4, & (1) \\ |3x^2+5x|-2 \leqslant -3x^2+5x-4. & (2) \end{cases}\right.$$

Будем искать решения каждого из этих неравенств отдельно.

Записав неравенство (1) в чуть более простом виде

$$|3x^2+5x| \geqslant 3x^2-5x+6,$$

заметим, что оно в свою очередь равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 3x^2+5x \geqslant 3x^2-5x+6, \\ 3x^2+5x \leqslant -3x^2+5x-6, \end{array}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} 10x \geqslant 6, \\ 6x^2 \leqslant -6 \end{array}\right.$$

и значит

$$x \geqslant \frac{3}{5}\,.$$

Неравенство (2) удобно записать так

$$|3x^2+5x| \leqslant -3x^2+5x-2.$$

При условии неотрицательности правой части

$$\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1,$$

оно равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2+5x \leqslant -3x^2+5x-2, \\ 3x^2+5x \geqslant 3x^2-5x+2. \end{array}\right.$$

Откуда

$$\left\{\begin{array}{l} 6x^2 \leqslant -2, \\ 10x \geqslant 2, \end{array}\right.$$

и значит, полученная система решений не имеет.

Подведём итоги — исходное неравенство справедливо при

$$x \geqslant \frac{3}{5}\,.$$

Ответ:

$$x \geqslant \frac{3}{5}\,.$$

На заметку! Раскрывая модуль при решении этой задачи, мы дважды пользовались тем, что знак правой части неравенства нам известен — сначала тем, что правая часть положительна, а затем, что правая часть неотрицательна.

Однако при решении неравенств вида

$$|f(x)| \geqslant g(x) \qquad \text{и} \qquad |f(x)| \leqslant g(x)$$

знак у выражения $g(x)$ можно и не выяснять — окончательный результат не зависит от того, каков этот знак.

Чтобы убедиться в этом, стоит рассмотреть два простых неравенства (первое из которых выполнено для любого значения x, а второе не выполняется никогда):

$$|x| \geqslant -2 \qquad \text{и} \qquad |x| \leqslant -2.$$

Формально решая первое из этих неравенств

$$|x| \geqslant -2,$$

получаем

$$\left[\begin{array}{l} x \geqslant \; -2, \\ x \leqslant \; -(-2) = 2. \end{array}\right.$$

Нетрудно заметить, что любое значение искомой неизвестной x подчиняется либо первому из этих условий, либо второму, либо обоим условиям одновременно.

Записывая второе из неравенств

$$|x| \leqslant -2$$

в равносильной форме, получаем противоречивое условие

$$-(-2) \leqslant x \leqslant -2.$$

Конечно, в только что рассмотренном простейшем случае решения легко выписываются сразу, потому что для каждого из неравенств их совсем нетрудно увидеть. Но если, сразу не увидев этих решений, вы начали их искать, решая задачу описанным выше способом, то, не допустив нелепых ошибок, все равно придёте к правильному ответу, разве что немного позже.

И наконец, последняя задача этого раздела.

Нередко умение решать уравнения и неравенства с модулем оказывается очень полезным и при решении задач, условия которых знаков абсолютной величины не содержат.

Пример 9 (экономический факультет МГУ, отделение экономики, 2000). Найдите все решения уравнения

$$3\sqrt{x^2-4x+4}-4-x=\left(\sqrt{-x^2+x+2}\right)^2.$$

По внешнему виду это уравнение относится к уравнениям с радикалами, о способах решения которых речь пойдёт позже в соответствующем разделе нашего пособия. Однако, внимательно присмотревшись (что никогда не вредно сделать перед тем, как приступать непосредственно к решению!), можно заметить, что избавиться от радикалов в заданном уравнении совсем нетрудно. Достаточно воспользоваться тем, что под первым корнем располагается полный квадрат, $(x-2)^2$, и что

$$\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|$$

для любой функции $f(x)$.

В области допустимых значений, описываемой неравенством

$$x^2 - x - 2 \leqslant 0,$$

наше уравнение равносильно уравнению с модулем

$$3|x-2| - 4 - x = -x^2 + x + 2.$$

Вследствие того, что область допустимых значений совпадает с отрезком

$$-1 \leqslant x \leqslant 2,$$

выполнено равенство

$$|x-2| = -(x-2).$$

Поэтому исходное уравнение можно записать в следующем виде:

$$3(-x+2) - 4 - x = -x^2 + x + 2.$$

Отсюда

$$x^2 - 5x = 0.$$

Корни этого уравнения находятся совсем просто. Имеем

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = 5.$$

В область допустимых значений входит лишь $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Глава 2

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Рациональными называются уравнения и неравенства, левые и правые части которых представляют собой **суммы рациональных дробей** — отношений многочленов.

Наши рассмотрения мы начнём с рациональных уравнений.

Общий метод решения таких уравнений состоит в сведении их к простейшим уравнениям — линейным, квадратным и биквадратным. Основными приемами здесь являются приведение к общему знаменателю, разложение на множители и удачная замена переменной.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Решите уравнение

$$\frac{6x+12}{x^2+x-2} - x = 0.$$

Область допустимых значений (ОДЗ) этого уравнения определяется из условия

$$x^2 + x - 2 \neq 0,$$

которое выполняется при $x \neq -2$ и $x \neq 1$.

Если умножить обе части заданного уравнения на знаменатель левой части и перейти к равносильному в ОДЗ уравнению, получим кубическое уравнение, найти корни которого не всегда просто.

Покажем, что в данном случае этого можно избежать.

Разложим числитель и знаменатель дроби на множители и перейдём к равносильному уравнению

$$\frac{6(x+2)}{(x-1)(x+2)} - x = 0.$$

Это уравнение, в свою очередь, равносильно (при $x \neq -2$ и $x \neq 1$!) уравнению

$$\frac{6}{x-1} - x = 0,$$

решить которое уже нетрудно.

Умножая обе его части на $x - 1$, после несложных преобразований получим, что

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -2.$$

Учитывая ОДЗ, оставляем только $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Заметим, что если бы мы сразу поделили числитель и знаменатель дроби на $x + 2$, то возник бы посторонний корень (от которого, впрочем, можно легко избавиться путём проверки — подстановкой полученных значений неизвестной непосредственно в исходное уравнение).

Пример 2. Решите уравнение

$$\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}\,.$$

ОДЗ этого уравнения находится легко

$$x \neq 0, \quad x \neq -2 \quad \text{и} \quad x \neq -1.$$

Прежде чем преобразовывать данное уравнение, прикинем, к чему может привести непродуманный шаг. Например, такой, как приведение дробей к общему знаменателю. В силу того, что в знаменателях стоят квадратные трёхчлены, в результате получим уравнение четвёртой степени (не биквадратное!).

Поэтому здесь, в отличие от предыдущего примера, где для упрощения ситуации мы раскладывали знаменатель на множители, полезно представить себе, как выглядели знаменатели дробей левой части *до* их разложения на множители.

А вот как:

$$\frac{1}{x^2+2x} - \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{12}\,.$$

Из полученного соотношения легко усматривается возможность замены переменной

$$y = x^2 + 2x,$$

которая позволяет перейти к квадратному уравнению.

В самом деле, проведя несложные преобразования с уравнением

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{12},$$

получим уравнение

$$y^2 + y - 12 = 0,$$

которое имеет два корня

$$y_1 = -4 \quad \text{и} \quad y_2 = 3.$$

Таким образом, удачная замена переменной позволила заметно упростить поиск решения исходной задачи.

Возвращаясь к исходной переменной x, получаем два уравнения для её отыскания —

$$x^2 + 2x = -4$$

и

$$x^2 + 2x = 3.$$

Первое из уравнений

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

решений не имеет, а у второго

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

два решения

$$x_1 = -3 \quad \text{и} \quad x_2 = 1.$$

Ответ: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

Пример 3. Решите уравнение

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0.$$

Угадать замену в этом уравнении очень легко (без неё пришлось бы мучиться с уравнением четвёртой степени). Положим

$$y = \frac{x^2 + x - 5}{x}.$$

Считая $y \neq 0$, можно записать исходное уравнение совсем просто —

$$y + \frac{3}{y} + 4 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня

$$y_1 = -3 \quad \text{и} \quad y_2 = -1.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим два уравнения

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} = -3$$

и

$$\frac{x^2 + x - 5}{x} = -1,$$

найти решения которых уже совсем легко.

Имеем соответственно

$$x_1 = -5, \quad x_2 = 1$$

и

$$x_3 = 1 + \sqrt{6}, \quad x_4 = 1 - \sqrt{6}.$$

Ответ: $x_1 = -5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 + \sqrt{6}$, $x_4 = 1 - \sqrt{6}$.

Пример 4. Решите уравнение

$$4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47.$$

После простой перегруппировки членов левой части и вынесения за скобки числовых множителей получим уравнение следующего вида:

$$4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) = 47.$$

Положим

$$y = x + \frac{1}{x}\,.$$

Возведя обе части этого соотношения в квадрат, получим

$$y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\,.$$

Легко видеть, что

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Тем самым, относительно новой переменной y наше уравнение примет вид

$$4(y^2 - 2) + 12y = 47.$$

Отсюда

$$4y^2 + 12y - 55 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня

$$y_1 = -\frac{11}{2} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{5}{2}\,.$$

Переходя к исходной переменной x, получим соответственно два уравнения

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{11}{2}$$

и

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}\,,$$

первое из которых имеет корни

$$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{105}}{4}\,, \quad x_2 = \frac{-11 + \sqrt{105}}{4}\,,$$

а второе —

$$x_3 = 2, \quad x_4 = \frac{1}{2}\,.$$

Ответ:

$$x_1 = \frac{-11 - \sqrt{105}}{4}\,, \quad x_2 = \frac{-11 + \sqrt{105}}{4}\,, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = \frac{1}{2}\,.$$

На заметку! Замену, при помощи которой находятся решения этого уравнения, *следует хорошо запомнить* (эта замена очень полезна!).

Удачная замена в следующем уравнении менее очевидна, и потому ситуацию, в которой она оказывается эффективной, также полезно запомнить.

Пример 5. Решите уравнение

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{10}{9}\,.$$

Положим

$$y = x + 1,$$

считая, что $y \neq \pm 1$ (или, что то же, $x \neq 0$ и $x \neq -2$). Тогда

$$x = y - 1 \quad \text{и} \quad x + 2 = y + 1,$$

и наше уравнение относительно новой переменной примет вид

$$\frac{1}{(y-1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} = \frac{10}{9}\,.$$

Дальнейшие преобразования этого уравнения приводят к уравнению четвёртой степени, которое оказывается биквадратным!

Именно, после приведения к общему знаменателю и естественных упрощений получим уравнение

$$\frac{2y^2+2}{(y^2-1)^2}=\frac{10}{9},$$

которое равносильно уравнению

$$5y^4-18y^2-4=0.$$

Решим его

$$y_1=2 \quad \text{и} \quad y_2=-2.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем

$$x_1=1, \quad x_2=-3.$$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=-3$.

Разложение на множители и удачная замена переменной почти всегда позволяют свести рациональные уравнения, предлагаемые на вступительных экзаменах, к квадратным или биквадратным уравнениям (то же самое справедливо и для решения рациональных неравенств, которые подобным же образом — разложением на множители и удачной заменой переменной — сводятся к неравенствам, решения которых находятся потом *методом интервалов* (см. с. 38)). Однако если этого не удаётся сделать в принципе, или же вами выбран не самый простой путь решения задачи и получено, например, *кубическое* уравнение, отчаиваться не стоит. В некоторых случаях такие уравнения решаются достаточно просто.

Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 6. Решите уравнение

$$x^3+5x^2-4=0.$$

Способ решения этого уравнения прост и оригинален — один из корней уравнения нужно угадать. Для этого можно воспользоваться тем обстоятельством, что все целые корни уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

Заметим, что для многочленов, коэффициенты которых целыми числами не являются, это, вообще говоря, несправедливо.

Итак, если у нашего уравнения есть целые корни, то они находятся среди чисел 1, −1, 2, −2, 4 и −4, каждое из которых и следует проверить.

Нам повезло —

$$x = -1$$

является корнем заданного уравнения.

Учитывая это, можно утверждать, что заданный многочлен представи́м в виде произведения одночлена $x+1$ и квадратного трёхчлена, коэффициенты которого можно найти несколькими способами — подбором, группировкой и разложением на множители, или методом деления исходного многочлена на одночлен $x+1$ *уголком.*

Деление уголком многочленов очень похоже на обычный процесс деления натуральных чисел, нужно только и многочлен-делимое и многочлен-делитель записать так, чтобы слагающие их одночлены располагались в порядке убывания степеней.

В результате деления нашего многочлена x^3+5x^2-4 на $x+1$ получится квадратный трёхчлен x^2+4x-4. Это даёт нам право написать следующее равенство

$$x^3+5x^2-4 = (x+1)(x^2+4x-4).$$

Разложив таким образом исходный многочлен, мы легко можем закончить решение нашего уравнения: квадратный трёхчлен, получившийся в результате деления, имеет корни

$$x_2 = -2-2\sqrt{2}, \quad x_3 = -2+2\sqrt{2}.$$

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -2-2\sqrt{2}$, $x_3 = -2+2\sqrt{2}$.

Если вам не хочется заниматься делением многочленов или вы не умеете делить уголком, тот же результат можно получить без особых трудностей при помощи перегруппировки его членов и разложения на множители.

В нашем случае это можно сделать так

$$x^3+5x^2-4 = x^3+x^2+4x^2-4 =$$
$$= x^2(x+1)+4(x-1)(x+1) = (x+1)(x^2+4x-4).$$

Перейдём теперь к рассмотрению рациональных неравенств.

Как правило, решение рационального неравенства осложняется тем, что мы не можем запросто освободиться от знаменателей дробей, умножая на них обе части неравенства. Это происходит вследствие того, что выражения, стоящие в знаменателях дробей, при подстановке вместо неизвестной различных числовых значений могут принимать разные знаки, а знак неравенства очень чувствителен к тому, на какое выражение умножаются обе его части — на положительное или на отрицательное. Если же знак выражения, на которое вы намереваетесь умножить обе части неравенства, заранее вам неизвестен, то во избежание ошибок лучше от этого намерения отказаться. Поэтому сведение рационального неравенства к линейному, квадратному или биквадратному неравенствам путём отбрасывания общего знаменателя возможно далеко не всегда.

Решения многих рациональных неравенств можно находить, сводя их к отношению произведений одночленов —
либо к виду

$$\frac{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m}}{(x-b_1)^{n_1}(x-b_2)^{n_2}\ldots(x-b_l)^{n_l}} > 0,$$

либо к виду

$$\frac{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m}}{(x-b_1)^{n_1}(x-b_2)^{n_2}\ldots(x-b_l)^{n_l}} < 0.$$

Знак неравенства может быть как строгим, так и нестрогим —

$$\frac{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m}}{(x-b_1)^{n_1}(x-b_2)^{n_2}\ldots(x-b_l)^{n_l}} \geqslant 0,$$

$$\frac{(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m}}{(x-b_1)^{n_1}(x-b_2)^{n_2}\ldots(x-b_l)^{n_l}} \leqslant 0.$$

Это сведение осуществляется

либо простым приведением к общему знаменателю (и его сохранению — отбрасывание знаменателя в неравенствах, как правило, приводит к большим ошибкам) и дальнейшим разложением на множители полученных многочленов, либо путём использования удачных замен переменных, подобно тому, как это делается при решении рациональных уравнений.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример **7** (институт стран Азии и Африки МГУ, 1998). Решите неравенство

$$\frac{3|x|-11}{x-3} > \frac{3x+14}{6-x}\,.$$

Здесь (см. раздел «Уравнения и неравенства с модулем») необходимо рассмотреть два случая.

Случай 1. Пусть $x \geqslant 0$. Тогда исходное неравенство можно записать в виде

$$\frac{3x-11}{x-3} > \frac{3x+14}{6-x}\,.$$

Приведя к общему знаменателю, после несложных преобразований приходим к неравенству

$$\frac{-6x^2+24x-24}{(x-3)(6-x)} > 0,$$

которое равносильно одному из неравенств описанного выше вида

$$\frac{(x-2)^2}{(x-3)(x-6)} > 0.$$

Замечание. Все приводимые ниже рассуждения применимы лишь тогда, когда во всех скобках неизвестная стоит первой (слева). Этого можно добиться, умножая обе части неравенства на -1 соответствующее число раз и, естественно, не забывая при этом каждый раз менять знак неравенства.

Общий метод решения таких неравенств называется *методом интервалов* и заключается в следующем.

Прежде всего мы отмечаем на оси все числа, которые обращают в нуль или числитель, или знаменатель (в нашем случае это числа 2, 3 и 6). Затем помечаем те из них, которые заведомо не могут являться решением нашего неравенства (например, если неравенство строгое, как в рассматриваемом примере, то помечаем все эти числа, 2, 3 и 6, а если нестрогое — то только соответствующие числа знаменателя). Затем на всех интервалах, на которые эти числа делят числовую ось (рис. 2.1), расставляем знаки дроби в левой части неравенства следующим образом. На первом промежутке справа (больше наибольшего числа) ставим знак *плюс*, затем, если кратность нашего одночлена (степень скобки), соответствующего числу, через которое мы переходим, идя справа налево, является нечётной, то меняем знак на противоположный, если чётной — то оставляем тот же знак.

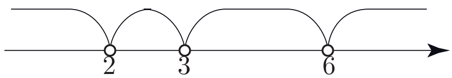


Рис. 2.1

В нашем случае, идя справа налево, сначала (справа от 6, больше наибольшего) ставим плюс, затем, перейдя через 6, ставим минус ($x-6$ входит в первой степени), который при переходе через 3 меняем на плюс, поскольку $x-3$ также входит в первой степени, и, наконец, слева от 2 опять ставим плюс, поскольку $x-2$ входит в рассматриваемое выражение во второй степени (рис. 2.2).

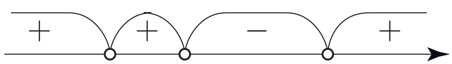


Рис. 2.2

Замечание. Неравенства описанных видов можно решать, перемещаясь вдоль числовой оси и слева направо, вычисляя знак дроби в каждом из отмеченных интервалов следующим образом. Так как в области слева от 2 (меньше наименьшего числа) все одночлены вида $x - a_i$ и $x - b_k$ отрицательны, то знак дроби в ней зависит от чётности их числа: если число одночленов чётно, то дробь положительна, и отрицательна, если число одночленов нечётно. Каждый раз, переходя через нуль, a_i или b_k, соответствующего одночлена,

$x - a_i$ или $x - b_k$, нужно отслеживать количество отрицательных одночленов рассматриваемой дроби с учётом кратности (степени скобки). Знак дроби меняется вместе с чётностью числа отрицательных сомножителей.

Тем самым, наше неравенство оказывается справедливым при

$$x < 2, \quad 2 < x < 3 \quad \text{и} \quad x > 6.$$

Совместив найденные решения с нашим допущением $x \geqslant 0$, получим решение для первого случая:

$$0 \leqslant x < 2, \quad 2 < x < 3 \quad \text{и} \quad x > 6.$$

Случай 2. Пусть $x < 0$. Тогда исходное неравенство примет вид

$$\frac{-3x - 11}{x - 3} - \frac{3x + 14}{6 - x} > 0.$$

Оно легко приводится к неравенству

$$\frac{12(x + 2)}{(x - 6)(x - 3)} > 0,$$

решение которого можно найти при помощи метода интервалов.

Поступая далее так же, как и в первом случае, получаем, что неравенство выполняется при

$$2 < x < 3 \quad \text{и} \quad x > 6.$$

Совместив это решение с нашим допущением $x < 0$, получим решение для второго случая

$$-2 < x < 0.$$

Объединяя решения, найденные в каждом из двух рассматриваемых случаев, получаем ответ.

Ответ: $-2 < x < 2$, $2 < x < 3$, $x > 6$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{4x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} > 1 - 2x.$$

Обычное приведение к общему знаменателю нельзя назвать удачным шагом — в числителе окажется многочлен третьей степени. Но этого можно избежать, разложив числитель левой части на множители. Имеем

$$\frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2-3x+2}+(2x-1)>0.$$

Вынося далее $2x-1$ за скобки, после несложных преобразований получим неравенство

$$\frac{(2x-1)(x^2-x+3)}{x^2-3x+2}>0.$$

Поскольку дискриминант квадратного трёхчлена

$$x^2-x+3$$

меньше нуля, неравенство

$$x^2-x+3>0$$

выполняется при всех x. Учитывая это, а также и то, что

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2),$$

можно перейти к равносильному неравенству

$$\frac{2x-1}{(x-2)(x-1)}>0,$$

которое легко решается методом интервалов.

Ответ: $1/2<x<1$, $x>2$.

Решение последней задачи данного раздела основано на использовании достаточно типичного перехода к равносильному неравенству (при решении неравенств этот переход всегда полезно иметь в виду).

Пример 9 (факультет психологии МГУ, 1991). Решите неравенство

$$\left(-\frac{x}{2}+\frac{5}{8}-\frac{15}{88-32x}\right)^2\leqslant 1.$$

Легко показать, что для любой функции $f(x)$ и положительного числа a неравенство

$$f^2(x)\leqslant a^2$$

равносильно и неравенству

$$|f(x)| \leqslant a,$$

и двойному неравенству

$$-a \leqslant f(x) \leqslant a.$$

Воспользуемся этим при поиске решения заданного неравенства.

Приведём дроби к общему знаменателю и запишем двойное неравенство, равносильное исходному

$$-1 \leqslant \frac{2x^2 - 8x + 5}{11 - 4x} \leqslant 1.$$

После несложных преобразований оно, в свою очередь, сводится к системе двух неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{11 - 4x} \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2 - 6x + 8}{11 - 4x} \geqslant 0, \end{cases}$$

каждое из которых легко решается при помощи метода интервалов.

Первому неравенству удовлетворяют значения неизвестной, подчинённые условию

$$x \geqslant 3 \quad \text{и} \quad -1 \leqslant x < \frac{11}{4},$$

а второму —

$$\frac{11}{4} < x \leqslant 4 \quad \text{и} \quad x \leqslant 2.$$

Выбирая их этих двух наборов значения x, удовлетворяющие обоим условиям, получаем ответ (рис. 2.3).

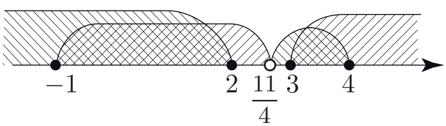


Рис. 2.3

Ответ: $-1 \leqslant x \leqslant 2$, $3 \leqslant x \leqslant 4$.

Глава 3

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С РАДИКАЛАМИ

Под *радикалами* мы будем понимать, главным образом, квадратные корни.

Основной приём решения рассматриваемых в этом разделе задач — возведение обеих частей уравнения или неравенства в квадрат. При этом необходимо всегда помнить, что в результате такого преобразования в принципе возможно появление посторонних корней. Часто это может быть связано с расширением области допустимых значений (ОДЗ) в результате возведения в квадрат.

Обычно поступающие, столкнувшись с уравнением или неравенством с радикалами, вначале ищут ОДЗ. Однако следует помнить, что далеко не всегда это необходимо; более того, в целом ряде случаев поиск ОДЗ сопряжён с преодолением значительных технических трудностей.

Рассмотрим пример.

Пример 1. Решите уравнение

$$\sqrt{x^3 - x + 5} = \sqrt{x^3 + x^2 - 1}.$$

Поиск ОДЗ в этой задаче связан с решением двух кубических уравнений, угадать корни которых практически невозможно.

Поэтому поступим несколько иначе. Возведём обе части уравнения в квадрат. Имеем

$$x^3 - x + 5 = x^3 + x^2 - 1.$$

После приведения подобных получим уравнение

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

которое имеет два корня

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -3.$$

Ясно, что ОДЗ уравнения, получившегося после возведения в квадрат, может оказаться шире ОДЗ исходного уравнения, поэтому разумно произвести проверку найденных значений.

Подставив найденные корни в исходное уравнение, получим, что $x = 2$ является решением исходного уравнения ($\sqrt{11} = \sqrt{11}$), а $x = -3$ — нет (квадратный корень из -19 не извлекается).

Ответ: $x = 2$.

Пример 2 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 1994). Решите уравнение

$$\sqrt{x-7} = 13 - x.$$

В отличие от предыдущего примера, найти ОДЗ здесь очень легко. Для этого необходимо решить неравенство

$$x - 7 \geqslant 0,$$

что приводит к условию $x \geqslant 7$.

Теперь, казалось бы, можно смело возводить обе части уравнения в квадрат. Однако, как легко убедиться, после возведения в квадрат и отыскания решений уравнения

$$x - 7 = 169 + x^2 - 26x$$

окажется, что оба его корня, и 11 и 16, войдут в ОДЗ. Вместе с тем, лишь $x = 11$ является решением исходного уравнения.

Дело в том, что возведение обеих частей уравнения

$$\sqrt{x-7} = x - 13$$

в квадрат приводит к такому же квадратному уравнению, и именно 16, а не 11, будет решением этого уравнения с радикалом.

Впрочем, появления постороннего корня в исходном уравнении можно избежать, если заметить, что его правая часть должна быть неотрицательной

$$13 - x \geqslant 0.$$

Возведение в квадрат приводит к равносильному уравнению или неравенству лишь в том случае, если на рассматриваемом промежутке (в данном случае в ОДЗ) обе части неотрицательны!

Поэтому правильным решением (и оформлением этого решения) может считаться цепочка преобразований, в результате каждого из которых получается система, равносильная предыдущей:
от уравнения

$$\sqrt{x-7} = 13 - x$$

переходим к равносильной ему системе

$$\begin{cases} x \leqslant 13, \\ x - 7 = 169 + x^2 - 26x, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} x \leqslant 13, \\ x^2 - 27x + 176 = 0, \end{cases}$$

а эта в свою очередь, равносильной системе

$$\begin{cases} x \leqslant 13, \\ x_1 = 11, x_2 = 16. \end{cases}$$

Последняя даёт возможность написать ответ.

Ответ: $x = 11$.

Заметим, что в приведённой выше цепочке равносильных переходов неравенство $x - 7 \geqslant 0$, определяющее ОДЗ, отсутствует. Его решение совсем необязательно, так как для всех x, удовлетворяющих уравнению

$$x - 7 = (13 - x)^2,$$

выражение $x - 7$ непременно будет неотрицательным.

Конечно, предварительное отыскание ОДЗ не считается ошибкой, хотя делать это в нашем случае, как видно, не нужно.

Во втором примере, как и в первом, можно было также ограничиться прямым возведением в квадрат и последующей проверкой, которая исключила бы посторонний корень $x = 16$. Однако в целом ряде случаев проверка путём подстановки корней в исходное уравнение оказывается связанной с серьезными вычислительными трудностями.

Если же необходимо решать неравенство с радикалами, то такая проверка бывает невозможной в принципе, поскольку потребуется проверить бесконечное множество решений. Поэтому решение неравенств следует проводить, аккуратно выписывая цепочку результатов равносильных переходов, подобную той, которую мы построили, решая последнее уравнение.

Пример 3 (экономический факультет МГУ, отделение экономики, 1995). Решите неравенство

$$2x - 3 < 2\sqrt{x^2 + x - 6}.$$

Отметим прежде всего, что неравенство имеет смысл лишь при непременном выполнении условия

$$x^2 + x - 6 \geqslant 0.$$

Если левая часть неравенства отрицательна, то наше неравенство будет справедливо при всех x, для которых

$$x^2 + x - 6 \geqslant 0,$$

поскольку квадратный корень по определению неотрицателен.

Сводя сказанное вместе, получаем

$$\begin{cases} 2x - 3 < 0, \\ x^2 + x - 6 \geqslant 0. \end{cases}$$

Если же стоящее в левой части выражение неотрицательно, то возведение в квадрат к появлению посторонних решений не приведёт. При этом ясно, что для всех x, удовлетворяющих неравенству, получившемуся в результате возведения в квадрат, подкоренное выражение исходного неравенства будет неотрицательно. И вот что получается в этом случае:

$$\begin{cases} 2x - 3 \geqslant 0, \\ (2x-3)^2 < 4(x^2 + x - 6). \end{cases}$$

Приведённые рассуждения подвели нас к тому, что, избавляясь от радикала, мы сводим исходное неравенство к равносильной ему совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 2x-3<0, \\ x^2+x-6\geqslant 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 2x-3\geqslant 0, \\ (2x-3)^2<4(x^2+x-6). \end{cases}$$

Поиск решений этих систем не вызывает трудностей. Как легко убедиться, первой системе удовлетворяют все

$$x\leqslant -3,$$

второй — все

$$x>\frac{33}{16}\,.$$

Объединяя найденные решения, получаем ответ.

Ответ:

$$x\leqslant -3, \qquad x>\frac{33}{16}\,.$$

Пример 4 (геологический факультет МГУ, 1984). Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-3x+2}\leqslant 3x-3.$$

Здесь неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x-3\geqslant 0, \\ x^2-3x+2\geqslant 0, \\ x^2-3x+2\leqslant (3x-3)^2, \end{cases}$$

что можно оправдать следующими соображениями.

Если правая часть неравенства отрицательна, то это неравенство решений иметь не будет.

В случае неотрицательности выражения, стоящего в правой части, обе части неравенства можно смело возводить в квадрат, не забыв, однако, потребовать, чтобы подкоренное выражение левой части исходного неравенства также было неотрицательным.

Это обязательно нужно сделать, поскольку выполнение третьего неравенства нашей системы справедливость второго отнюдь не гарантирует!

Дальнейшая часть поиска решений особого труда не составляет. Найдя решения каждого из неравенств системы по отдельности, получим систему, равносильную исходному неравенству —

$$\begin{cases} & x \geqslant 1, \\ x \leqslant 1, & x \geqslant 2, \\ x \leqslant 7/8, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда легко получить все решения нашего неравенства и выписать ответ.

Ответ: $x = 1$, $x \geqslant 2$.

Пример 5 (факультет почвоведения МГУ, 1998). Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{5x-6} = 1.$$

Для отыскания решений этого уравнения процедуру возведения в квадрат придётся проводить дважды, так как путём однократного её выполнения избавиться от квадратных корней в данном случае не удастся.

Прежде чем возводить в квадрат, удобно перенести второй радикал

$$\sqrt{5x-6}$$

вправо. Тогда обе части уравнения будут неотрицательны (разумеется, там, где они имеют смысл):

$$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{5x-6}.$$

В результате возведения в квадрат получим

$$x + 1 = 1 + 5x - 6 + 2\sqrt{5x-6},$$

или после упрощений

$$\sqrt{5x-6} = 3 - 2x.$$

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3 - 2x \geqslant 0, \\ 5x - 6 = (3 - 2x)^2, \end{cases}$$

поиск решения которой не представляет труда.

Уравнение системы имеет два корня

$$x_1 = \frac{5}{4} \quad \text{и} \quad x_2 = 3,$$

из них лишь $x = 5/4$ удовлетворяет неравенству системы.

Ответ: $x = 5/4$.

На заметку! При поиске решения этого уравнения у нас не было необходимости специально искать ОДЗ. Однако стоит дать следующий совет: если в уравнении или неравенстве содержатся два радикала или более и нахождение ОДЗ технически вполне достижимо (как, например, в только что разобранном примере), то для большей надёжности и уверенности разумно её предварительно отыскать. Тогда в дальнейшем, при возведении в квадрат, о знаке подкоренных выражений можно не задумываться. И вообще — никогда не следует пренебрегать лишней возможностью проверить на правильность найденный результат (иногда случаются ошибки, настолько нелепые и настолько досадные, что объяснить их появление просто невозможно).

При решении многих задач с радикалами, как и в случае с рациональными уравнениями и неравенствами, удачная замена переменной поможет существенно упростить процесс отыскания решений.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Пример 6. Решите уравнение

$$\frac{x}{x+1} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} = 3.$$

Замена переменной напрашивается сама собой. Положим

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x}}.$$

Глядя на уравнение, нетрудно заметить, что новая переменная не должна обращаться в нуль и, следовательно, может принимать лишь положительные значения.

Так как
$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{y^2},$$
то относительно переменной y исходное уравнение примет следующий вид
$$\frac{1}{y^2} - 2y = 3.$$

После умножения обеих частей этого уравнения на
$$y^2 > 0$$
приходим к кубическому уравнению
$$2y^3 + 3y^2 - 1 = 0,$$
один из корней которого $y_1 = -1$ легко угадывается. Пользуясь этим, разлагаем наш многочлен на множители и находим остальные корни. Имеем
$$\begin{aligned}2y^3 + 3y^2 - 1 &= \\ &= 2y^3 + 2y^2 + y^2 + y - y - 1 = (y+1)(2y^2 + y - 1).\end{aligned}$$

Квадратный трёхчлен, получившийся в результате разложения на множители, имеет корни
$$y_2 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad y_3 = -1.$$

Лишь один из найденных корней кубического уравнения является положительным и, значит, пригодным для нас — это
$$y = \frac{1}{2}.$$
Поэтому исходное уравнение равносильно уравнению
$$\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{2},$$
решить которое можно при помощи возведения обеих частей в квадрат.

Имеем
$$\frac{x+1}{x} = \frac{1}{4}.$$
Откуда $x = -4/3$.

Ответ: $x = -4/3$.

Пример 7 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1989). Решите уравнение

$$8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33.$$

Если мы изолируем радикал в левой части и возведём обе части уравнения в квадрат, то нам придётся иметь дело с уравнением четвёртой степени. Этого можно избежать, если найти удачную замену переменной. В рассматриваемом случае такая замена существует, но, в отличие от предыдущего примера, не лежит на поверхности.

Вынесем из-под знака радикала множитель 2 и обратим внимание на равенство коэффициентов при неизвестной x и в первой и во второй степени у квадратного трёхчлена под знаком радикала и у квадратного трёхчлена вне его:

$$16\sqrt{3+\underline{4x-4x^2}}+\underline{4x-4x^2}=33.$$

Искомая замена станет ещё более явной, если мы перепишем уравнение следующим образом

$$16\sqrt{3+4x-4x^2}+3+4x-4x^2=36.$$

Положив

$$y=\sqrt{3+4x-4x^2},$$

получим уравнение

$$16y+y^2=36,$$

корнями которого являются числа

$$y_1=-18 \quad \text{и} \quad y_2=2.$$

Вследствие условия $y \geqslant 0$ пригодно лишь второе.

Возвращаясь к исходной переменной, получим уравнение

$$\sqrt{3+4x-4x^2}=2,$$

которое равносильно уравнению

$$3+4x-4x^2=4,$$

имеющему единственный корень $x=1/2$.

Ответ: $x=1/2$.

Несмотря на то, что решённое выше уравнение предлагалось на вступительных экзаменах факультета вычислительной математики и кибернетики, оно явно не относится к задачам повышенной трудности. И вообще, для поступающего на факультеты гуманитарного профиля решение, по крайней мере, первых двух-трёх задач из варианта любого факультета МГУ (включая механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики) вполне по силам. Разумеется, при условии систематических занятий.

Пример 8. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{20+x}{x}}+\sqrt{\frac{20-x}{x}}=\sqrt{6}.$$

Для того чтобы увидеть замену, упрощающую поиск решения, сначала необходимо произвести почленное деление под знаками радикалов числителей на знаменатели. В результате получим

$$\sqrt{\frac{20}{x}+1}+\sqrt{\frac{20}{x}-1}=\sqrt{6}.$$

Вводя теперь новую переменную

$$y=\frac{20}{x}\,,$$

приходим к уравнению

$$\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}=\sqrt{6},$$

найти решение которого достаточно просто.

Действительно, возведя обе части уравнения в квадрат, после приведения подобных получим уравнение

$$\sqrt{y^2-1}=3-y,$$

равносильное предыдущему при $y\geqslant 1$. Это уравнение, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases} 3-y\geqslant 0, \\ y^2-1=(3-y)^2, \end{cases}$$

уравнение которой имеет единственное решение

$$y=\frac{5}{3}\,.$$

Найденное значение неизвестной удовлетворяет и неравенству $3 - y \geqslant 0$, и условию $y \geqslant 1$.

Возвращаясь к переменной x, можно утверждать, что исходное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{20}{x} = \frac{5}{3}\,.$$

Отсюда получаем искомое значение неизвестной.

Ответ: $x = 12$.

Пример 9 (экономический факультет МГУ, отделение экономики, 1998). Решите неравенство

$$\sqrt{x + 8(3 - \sqrt{8+x})} < \frac{x+16}{2\sqrt{8+x} - 10}\,.$$

Попробуем сначала упростить неравенство путём введения новой переменной. Положим

$$y = \sqrt{8+x},$$

отметив сразу же, что здесь $y \geqslant 0$.

Выразив исходную неизвестную x через только что введённую

$$x = y^2 - 8,$$

можно перейти к неравенству

$$\sqrt{y^2 - 8y + 16} < \frac{y^2+8}{2y-10}\,.$$

Заметим, что под знаком радикала стоит полный квадрат — $(y-4)^2$. Это позволяет записать неравенство в равносильном виде, но без радикалов

$$|y - 4| < \frac{y^2+8}{2(y-5)}\,.$$

Теперь необходимо рассмотреть два случая.

Случай 1. Пусть $y < 4$. Если мы не будем спешить с приведением к общему знаменателю, а внимательно посмотрим на правую часть неравенства, то обнаружим, что при всех y, меньших четырёх, она отрицательна (числитель $y^2 + 8$ всегда положителен, а знаменатель $2(y-5)$ в данном случае меньше нуля) и, следовательно, не может быть меньше левой части неравенства, которая всегда больше или равна нулю. Поэтому в рассматриваемом случае наше неравенство решений не имеет.

Случай 2. Пусть $y \geqslant 4$. Тогда неравенство принимает вид

$$y - 4 < \frac{y^2 + 8}{2(y-5)}\,.$$

После несложных преобразований получим равносильное ему неравенство

$$\frac{y^2 - 18y + 32}{2(y-5)} < 0,$$

или, что то же,

$$\frac{(y-16)(y-2)}{y-5} < 0.$$

Решения последнего неравенства, совмещенные с условием $y \geqslant 4$, составляют интервал $5 < y < 16$.

Возвращаясь к исходной переменной, получим двойное неравенство

$$5 < \sqrt{x+8} < 16,$$

решение которого легко выписывается.

Ответ: $17 < x < 248$.

Пример 10 (факультет психологии МГУ, 1998). Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{5x+3} - 2x + 5}{6 - 7x^2 + 41x} \leqslant 0.$$

Здесь изолирование радикала в левой части и дальнейшее возведение в квадрат приводят к существенным техническим трудностям. Удачной замены тоже не видно. Воспользуемся, однако, тем, что в правой части неравенства стоит нуль.

Это наблюдение позволяет так сформулировать поставленную задачу: найти те значения неизвестной, при которых дробь неположительна. Такой взгляд на заданное неравенство даёт возможность свести его к равносильной совокупности двух систем

$$\begin{cases} \sqrt{5x+3} - 2x + 5 \leqslant 0, \\ 6 - 7x^2 + 41x > 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \sqrt{5x+3} - 2x + 5 \geqslant 0, \\ 6 - 7x^2 + 41x < 0. \end{cases}$$

Найдём сначала решение первой системы

$$\begin{cases} \sqrt{5x+3} - 2x + 5 \leqslant 0, \\ 6 - 7x^2 + 41x > 0. \end{cases}$$

Первое её неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x - 5 \geqslant 0, \\ 5x + 3 \leqslant (2x-5)^2, \end{cases}$$

или, что то же,

$$\begin{cases} 2x - 5 \geqslant 0, \\ 4x^2 - 25x - 22 \leqslant 0. \end{cases}$$

Как нетрудно убедиться, этой системе удовлетворяют все

$$x \geqslant \frac{25 + \sqrt{273}}{8}.$$

Решения второго неравенства

$$7x^2 - 41x - 6 < 0$$

составляют интервал

$$-\frac{1}{7} < x < 6.$$

Поскольку

$$\frac{25+\sqrt{273}}{8} < \frac{25+\sqrt{289}}{8} < \frac{25+17}{8} = \frac{42}{8} < 6, \tag{$\star$}$$

решениями первой системы являются все

$$\frac{25+\sqrt{273}}{8} \leqslant x < 6.$$

Обратимся ко второй системе

$$\begin{cases} \sqrt{5x+3} - 2x + 5 \geqslant 0, \\ 6 - 7x^2 + 41x < 0. \end{cases}$$

Используя проведённое выше сравнение ($\star$), вы без особого труда сами сможете убедиться в том, что этой системе удовлетворяют все

$$-\frac{3}{5} \leqslant x < -\frac{1}{7}.$$

Наконец, объединяя решения обеих систем, получаем окончательный ответ.

Ответ:
$$-\frac{3}{5} \leqslant x < -\frac{1}{7}, \quad \frac{25+\sqrt{273}}{8} \leqslant x < 6.$$

Иногда решить сложное уравнение с радикалами удаётся достаточно просто при помощи специального приёма, основывающегося на применении следующих очевидных равенств (предполагается, что все выражения, входящие в эти равенства, имеют смысл):
$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \qquad \sqrt{a}+\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}. \qquad (\star\star)$$

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 11 (геологический факультет МГУ, 1985). Решите уравнение
$$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4}.$$

Ясно, что, избавляясь от радикалов путём возведений в квадрат, мы придём к уравнению высокой степени, отыскать решения которого — задача весьма трудоемкая. Поэтому постараемся найти менее утомительный подход.

Перепишем уравнение немного иначе
$$\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3x^2+2x+1}=\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-x+1}$$
и заметим, что
$$(3x^2-1)-(3x^2+2x+1)=-2x-2,$$
$$(x^2+2x+4)-(x^2-x+1)=3x+3.$$

Вследствие того что выражения в правых частях последних двух соотношений имеют сравнительно простой вид (это многочлены первой степени), можно попробовать применить первую формулу $(\star\star)$ к каждой из частей уравнения. В результате получим
$$\frac{-2x-2}{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3x^2+2x+1}}=\frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Заметим, что подкоренные выражения исходного уравнения одновременно в нуль не обращаются (например, квадратный трёхчлен x^2+2x+4 не равен нулю ни при каких значениях x ввиду того, что его дискриминант отрицателен). Поэтому проведённое преобразование приводит к уравнению, которое равносильно исходному. Следовательно, никакой потери корней после применения предложенного приёма в данном случае не происходит.

Нетрудно заметить, что

$$x = -1$$

является корнем полученного уравнения (то, что -1 входит в ОДЗ, легко проверить подстановкой в каждое из подкоренных выражений без отыскания ОДЗ в явном виде).

Пусть теперь $x \neq -1$. Тогда мы имеем право поделить обе части уравнения на $x + 1$. Получившееся в результате этой операции соотношение

$$-\frac{2}{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3x^2+2x+1}} = \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}}$$

решений не имеет, поскольку левая и правая части уравнения имеют разные знаки.

Ответ: $x = -1$.

В заключение — одно уравнение с кубическими радикалами.

Пример 12. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{x+7} = 4.$$

Заметим, что кубический корень всегда имеет смысл и потому возведение в куб обеих частей уравнения всегда приводит к уравнению, равносильному исходному.

Для упрощения вычислений изолируем один корень, перенеся другой вправо

$$\sqrt[3]{x+7} = 4 - \sqrt[3]{9-x},$$

а затем возведём обе части полученного уравнения в куб

$$x + 7 = 64 - 48\sqrt[3]{9-x} + 12(\sqrt[3]{9-x})^2 - 9 + x.$$

После приведения подобных и деления обеих частей уравнения на 12 придём к уравнению

$$(\sqrt[3]{9-x})^2 - 4\sqrt[3]{9-x} + 4 = 0.$$

Замена напрашивается здесь сама собой

$$y = \sqrt[3]{9 - x}.$$

И поскольку уравнение

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

имеет единственный корень

$$y = 2,$$

исходное уравнение оказывается равносильным уравнению

$$\sqrt[3]{9 - x} = 2.$$

Возводя в куб обе части этого уравнения, получим

$$9 - x = 8,$$

и далее

$$x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

Часто уравнения, в левой части которых стоит сумма двух радикалов, а в правой — число, удобно решать сведением к алгебраической системе двух уравнений с двумя неизвестными при помощи естественной замены переменных. Этот приём хорошо работает в тех случаях, когда сумма подкоренных выражений (или их линейная комбинация), которые сами по себе могут быть довольно громоздкими, не зависит от неизвестной. Так, вводя в последнем уравнении новые неизвестные

$$u = \sqrt[3]{x + 7}, \quad v = \sqrt[3]{9 - x}$$

и учитывая, что

$$(9 - x) + (x + 7) = 16,$$

приходим к системе

$$\begin{cases} u + v = 4, \\ u^3 + v^3 = 16, \end{cases}$$

найти решение которой достаточно просто (воспользовавшись, например, формулой для разложения суммы кубов).

О том, как решать эту и другие алгебраические системы, мы расскажем в следующем разделе.

Глава 4

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Наши рассмотрения мы начнём с самых простых алгебраических систем — систем из двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Их решение можно находить двумя способами — либо путём выражения одной переменной через другую с дальнейшей подстановкой во второе уравнение, либо исключением одной переменной посредством построения уравнения, которое представляет собой линейную комбинацию уравнений исходной системы (путём умножения уравнений на подходящим образом подобранные числа и сложением получившихся уравнений).

Имея дело с системой, необходимо помнить, что любое из её решений состоит из упорядоченного набора чисел, количество которых совпадает с числом неизвестных заданной системы. Так, решениями систем уравнений с двумя неизвестными являются *пары* чисел, а систем с тремя неизвестными — *тройки* чисел.

Разберём несколько простейших примеров.

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 7. \end{cases}$$

Выражая из первого уравнения неизвестную y через неизвестную x,

$$y = x - 5,$$

и подставляя найденное выражение во второе уравнение вместо y, получим

$$x + x - 5 = 7.$$

Откуда $x = 6$ и, следовательно, $y = 1$.

Тот же самый результат можно получить, почленно сложив уравнения исходной системы и исключив тем самым y. В самом деле, в результате описанной операции имеем

$$2x = 5 + 7,$$

и значит, $x = 6$ и $y = 1$.

Ответ: $x = 6$, $y = 1$.

Напомним, что линейное уравнение допускает простую геометрическую интерпретацию. Изображая на координатной плоскости Oxy все точки, координаты x и y которых связаны соотношением

$$ax + by = c,$$

где

$$a^2 + b^2 > 0,$$

мы получим прямую (рис. 4.1).

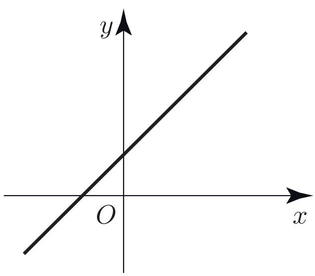


Рис. 4.1

Таким образом, найдя решение системы в примере 1, мы вычисляем координаты точки пересечения прямых, соответствующих уравнениям этой системы.

Поскольку две прямые на плоскости

- либо пересекаются в одной точке,
- либо параллельны,
- либо совпадают

(рис. 4.2), можно утверждать, что система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными

- либо имеет единственное решение,
- либо не имеет решений вовсе,
- либо имеет бесконечное множество решений.

И ничего иного быть просто не может!

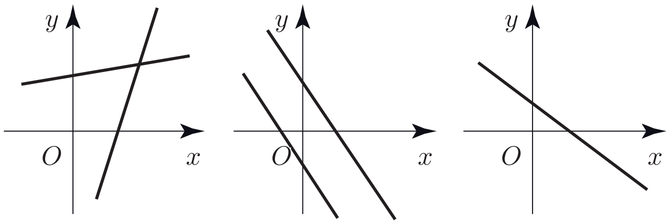


Рис. 4.2

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} -2x + y = 3, \\ 6x - 3y = 5. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 3 и сложив получившееся уравнение почленно со вторым, приходим к уравнению

$$0 \cdot x = 14,$$

которое решений не имеет. Следовательно, не имеет решений и исходная система (соответствующие прямые параллельны (рис. 4.3)).

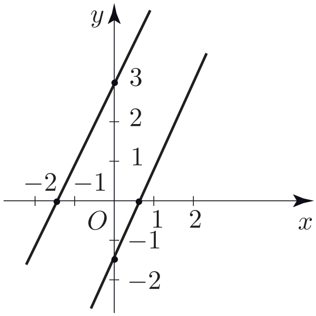


Рис. 4.3

Ответ: решений нет.

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 4x - 2y = 2. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем

$$y = 2x - 1.$$

Подставив это выражение во второе уравнение вместо y и приведя подобные, придём к уравнению

$$0 \cdot x = 0.$$

Оно свидетельствует о том, что система имеет бесконечное множество решений, что, впрочем, можно было заметить и не решая системы, поскольку второе уравнение получается из первого путём умножения обеих его частей на 2 (соответствующие прямые совпадают (рис. 4.4)). Ответ в таком случае записывается следующим образом.

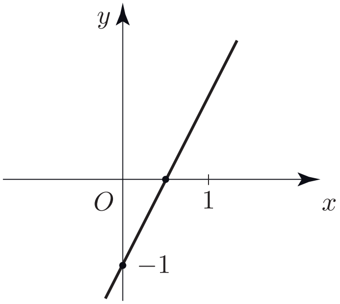


Рис. 4.4

Ответ: $x = t$, $y = 2t - 1$, где t — любое действительное число.

Нередко системы более сложных уравнений можно решить путём сведения их при помощи замены переменных к линейным уравнениям.

Пример 4 (механико-математический факультет МГУ, 1979). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x - 3y} + \dfrac{2}{3x - 2y} = \dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{3}{2x - 3y} - \dfrac{4}{3x - 2y} = 1. \end{cases}$$

Здесь замена переменных напрашивается сама собой —

$$u = \frac{1}{2x - 3y}, \quad v = \frac{1}{3x - 2y}.$$

Относительно новых переменных система будет линейной:

$$\begin{cases} u + 2v = \dfrac{5}{4}, \\ a3u - 4v = 1. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 2 и сложив получившееся уравнение со вторым, придём к уравнению

$$5u = \frac{3}{2}.$$

Следовательно,

$$u = \frac{1}{2}, \quad v = \frac{1}{8}.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x - 3y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{3x - 2y} = \dfrac{1}{8}, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна линейной системе

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара чисел

$$x = 4, \quad y = 2$$

(убедитесь в этом сами).

Ответ:

$$x = 4, \quad y = 2.$$

Некоторые системы в процессе их решения могут быть сведены к совокупности линейных систем.

Пример 5 (физический факультет МГУ, 1997). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + |x-2| = 3, \\ \qquad |y+x| = 6. \end{cases}$$

Здесь целесообразно раскрывать модуль сначала в первом уравнении.

Имеем два случая.

Случай 1. Пусть $x \geqslant 2$. Тогда после приведения подобных в первом уравнении получим уравнение

$$y + x = 5,$$

которое, как совсем просто заметить, несовместимо со вторым уравнением исходной системы.

Следовательно, при условии $x \geqslant 2$ наша система решений не имеет.

Случай 2. Пусть $x < 2$. Тогда первое уравнение равносильно уравнению

$$y - x = 1.$$

Второе уравнение равносильно совокупности двух уравнений. Поэтому на множестве $x < 2$ исходная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} y - x = 1, \\ y + x = 6 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y - x = 1, \\ y + x = -6. \end{cases}$$

Решение первой системы

$$x = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{7}{2}$$

условию $x < 2$ не удовлетворяет и, следовательно, пригодным не является.

Решение второй системы

$$x = -\frac{7}{2}, \quad y = -\frac{5}{2}$$

будет единственным решением исходной системы.

Ответ:

$$x = -\frac{7}{2}, \quad y = -\frac{5}{2}$$

Сложение (вычитание) уравнений и переход к равносильной системе является достаточно эффективным приёмом решения систем уравнений и более сложных, чем линейные.

Пример 6 (геологический факультет МГУ, 2000). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = 30, \\ x^2 + y^4 = 30. \end{cases}$$

На первый взгляд, найти здесь приемлемое для нас (без знаков радикала) выражение одной переменной через вторую практически невозможно. Попробуем поэтому поступить поиному, а именно — вычтем второе уравнение из первого. Производя в получившемся уравнении

$$x^4 + y^2 - x^2 - y^4 = 0$$

напрашивающуюся группировку и разлагая на множители, получим

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) = 0,$$

или

$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} y^2 = x^2, \\ y^2 = 1 - x^2, \end{array} \right.$$

каждое из которых позволяет нам легко выразить одну переменную через другую.

В случае

$$y^2 = x^2$$

первое уравнение исходной системы принимает вид

$$x^4 + x^2 - 30 = 0.$$

Это биквадратное уравнение имеет ровно два корня

$$x_1 = \sqrt{5} \quad \text{и} \quad x_2 = -\sqrt{5},$$

что в силу условия $y^2 = x^2$ даёт нам четыре пары чисел — решений исходной системы

$$(\sqrt{5}; \sqrt{5}), \quad (\sqrt{5}; -\sqrt{5}), \quad (-\sqrt{5}; \sqrt{5}), \quad (-\sqrt{5}; -\sqrt{5}).$$

При

$$y^2 = 1 - x^2$$

первое уравнение исходной системы записывается в виде

$$x^4 - x^2 - 29 = 0,$$

что, в свою очередь, равносильно уравнению

$$x^2 = \frac{1 + \sqrt{117}}{2}\,.$$

Не стоит сразу пытаться извлекать корень из такого *нехорошего* числа, равно как и пытаться искать значения y, соответствующие различным значениям x, из уравнения

$$y^2 = 1 - x^2.$$

Достаточно лишь заметить, что найденное значение квадрата неизвестной больше единицы,

$$x^2 > 1,$$

и потому соответствующее ему значение y^2 должно быть отрицательным, что невозможно.

Тем самым наша система никаких других решений, кроме уже найденных четырёх, не имеет.

Ответ: $(\sqrt{5}; \sqrt{5})$, $(\sqrt{5}; -\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}; -\sqrt{5})$.

Пример 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x^3 + y^3 = 16. \end{cases}$$

Можно, конечно, поступить так: выразить из первого уравнения y и, подставив во второе, получить уравнение относительно x.

Мы, однако, покажем другой способ решения данной системы, который можно применять при решении и более сложных систем.

Поскольку

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

и

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy,$$

а значит,

$$x^3 + y^3 = (x + y)((x + y)^2 - 3xy),$$

то, пользуясь тем, что

$$x + y = 4,$$

второе уравнение нашей системы можно переписать в виде

$$4(16 - 3xy) = 16,$$

или

$$xy = 4.$$

Таким образом, исходная система оказывается равносильной системе

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ \quad\; xy = 4, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение

$$x = 2, \quad y = 2$$

(убедитесь в этом сами).

Ответ: $x = 2$, $y = 2$.

Заметим, что если в каждом уравнении заданной системы вместо x написать y и, соответственно, x вместо y, то её вид совершенно не изменится! Такие системы принято называть *симметричными*.

Пример 8 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1995). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + xy + 5y = 10 + 7\sqrt{3}, \\ \\ \qquad x^2 + y^2 = 7. \end{cases}$$

В отличие от предыдущей системы, которую можно было решать, без труда выразив y через x из первого уравнения и подставив полученное выражение во второе, здесь приемлемого (с точки зрения простоты) выражения одной переменной через другую не видно. Однако легко заметить, что эта система, так же как и система из примера 7, является симметричной.

Рассуждения, используемые в процессе поиска решения предыдущей системы, наталкивают на следующую замену переменных:

$$u = x + y, \quad v = xy.$$

Поскольку

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy,$$

исходная система относительно новых переменных будет выглядеть следующим образом

$$\begin{cases} 5u + v = 10 + 7\sqrt{3}, \\ u^2 - 2v = 7. \end{cases}$$

Проведённая замена переменных понизила степень первого уравнения, и теперь неизвестную v можно выразить через неизвестную u линейно:

$$v = 10 + 7\sqrt{3} - 5u.$$

Подставив это выражение во второе уравнение, получим квадратное уравнение относительно u,

$$u^2 + 10u - (27 + 14\sqrt{3}) = 0,$$

корнями которого являются числа

$$2 + \sqrt{3} \quad \text{и} \quad -12 - \sqrt{3}.$$

При решении этого уравнения мы воспользовались тем, что

$$52 + 14\sqrt{3} = (7 + \sqrt{3})^2.$$

Найдя для каждого из этих значений u соответствующие значения v и возвращаясь к исходным переменным, получим, что заданная система равносильна совокупности двух следующих систем

$$\begin{cases} x + y = 2 + \sqrt{3}, \\ xy = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x+y= \ -12-\sqrt{3}, \\ \quad xy=70+12\sqrt{3}. \end{cases}$$

Легко убедиться в том, что решениями первой системы будут следующие пары чисел:

$$(2;\sqrt{3}) \quad \text{и} \quad (\sqrt{3};2).$$

Вторая система решений иметь не будет, поскольку дискриминант квадратного уравнения, получающегося после подстановки выражения неизвестной y через неизвестную x из первого уравнения во второе, окажется меньше нуля (проверьте это сами!).

Ответ: $(2;\sqrt{3})$, $(\sqrt{3};2)$.

Если одно из уравнений системы удаётся привести к виду

$$ax^2+bxy+cy^2=0,$$

где

$$a^2+c^2>0,$$

то можно попытаться решить такое уравнение (его называют *однородным* — каждое из слагаемых в левой части является одночленом второй степени относительно неизвестных x и y) как квадратное относительно x, считая y неизвестным числом (или относительно y, считая x неизвестным числом). Предположим для определённости, что $a \neq 0$. Если решения у этого уравнения существуют, то его можно представить в следующем виде

$$a(x-\alpha y)(x-\beta y)=0,$$

где α и β — некоторые числа.

Последнее равенство выполняется

- либо при $x=\alpha y$,
- либо при $x=\beta y$.

Поочередно подставляя эти выражения неизвестной x через неизвестную y во второе уравнение системы, находим искомые значения неизвестной y (если они, конечно, существуют).

Рассмотрим конкретный пример.

Пример 9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$$

Опишем два способа решения этой системы.

Способ 1. Умножив первое уравнение на -2, второе — на 3 и сложив полученные результаты, придём к однородному уравнению

$$y^2 - xy - 2x^2 = 0.$$

Разрешив это уравнение относительно y (считая x числом), имеем

$$y_1 = 2x, \quad y_2 = -x.$$

Таким образом, можно утверждать, что исходная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ y^2 - 3xy = 2 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y = -x, \\ y^2 - 3xy = 2, \end{cases}$$

поиск решения каждой из которых не представляет особого труда.

Легко убедиться в том, что первая система решений не имеет, а вторая имеет два решения

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{и} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(проверьте это сами!).

Способ 2. Поделим первое уравнение системы на второе

$$\frac{x^2 - 4xy + y^2}{y^2 - 3xy} = \frac{3}{2}\,.$$

Никаких решений при таком делении мы не теряем, так как делитель $y^2 - 3xy$ равен двум.

Заметим далее, что среди решений исходной системы не может быть таких решений, у которых неизвестная x была бы равна нулю. В самом деле, предположив, что $x = 0$, из первого уравнения системы мы получим, что $y^2 = 3$, а из второго, что $y^2 = 2$. Вследствие того, что числá, квадрат которого был бы одновременно равен и 3 и 2, не существует, мы можем заключить, что наше предположение о том, что $x = 0$, оказывается неверным, а верно совсем иное — $x \neq 0$.

Проведённое рассуждение позволяет разделить числитель и знаменатель полученной дроби на x^2. В результате деления мы получаем, что

$$\frac{1 - 4t + t^2}{t^2 - 3t} = \frac{3}{2},$$

где через t обозначено отношение неизвестных y и x,

$$t = \frac{y}{x}.$$

Полученное соотношение простыми преобразованиями приводится к квадратному уравнению относительно t —

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

корни которого равны 2 и -1.

Возвратимся к исходным неизвестным x и y. Имеем соответственно

$$y_1 = 2x, \quad y_2 = -x.$$

Подставляя найденные выражения для y во второе уравнение, находим решения системы. Разумеется, те же, что и полученные первым способом.

Ответ:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{и} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Рассмотрим ещё один пример.

Пример 10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x + y)(x^2 - y^2) = 2, \\ (x - y)(x^2 + y^2) = 5. \end{cases}$$

Так как ни пара

$$x = 0, \quad y = 0,$$

ни пара (x,y), в которой $x = y$, не являются решениями нашей системы, то без страха потерять решения можно поделить первое уравнение на второе. В результате получим

$$\frac{(x+y)(x^2-y^2)}{(x-y)(x^2+y^2)} = \frac{2}{5}\,.$$

После сокращения полученной дроби на $x - y$, умножения обеих частей уравнения на $5(x^2 + y^2)$ и приведения подобных, приходим к однородному уравнению

$$3y^2 + 10xy + 3y^2 = 0.$$

Решая его как квадратное относительно y (считая x числом), получим, что
либо

$$y = -3x,$$

либо

$$y = -\frac{x}{3}\,.$$

Подставим $y = -3x$ в первое уравнение исходной системы

$$16x^3 = 2.$$

В результате получим, что

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad y = -\frac{3}{2}\,.$$

Аналогичная подстановка в первое уравнение исходной системы

$$y = -\frac{x}{3}$$

приводит к решению

$$x = \frac{3}{2}\,, \quad y = -\frac{1}{2}\,.$$

Ответ:

$$\left(\frac{1}{2}\,, \quad -\frac{3}{2}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{3}{2}\,, \quad -\frac{1}{2}\right).$$

В заключении раздела рассмотрим класс задач, умение решать которые может пригодиться при решении так называемых *текстовых* задач.

Пример 11. Пусть известно, что

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ 4y - 7z = 5 \end{cases}$$

и требуется найти

$$2x + 10y - 23z.$$

На данном примере мы изложим метод решения подобных задач, который называется *методом неопределённых коэффициентов.*

Предъявленная система из двух уравнений с тремя неизвестными имеет бесконечное множество решений, и потому однозначно найти значения неизвестных x, y и z не представляется возможным. Однако суммы, составленные из неизвестных с некоторыми числовыми коэффициентами, подсчитать всё же можно.

Покажем, к примеру, как найти численное значение выражения

$$4x - 11z.$$

Умножим первое уравнение нашей системы на 4 и сложим получившееся уравнение со вторым,

$$4x - 4y - 4z + 4y - 7z = 5.$$

Как легко видеть, отсюда следует, что

$$4x - 11z = 5.$$

Для выражения $4x - 11z$ найти нужную комбинацию нам удалось легко. А именно, мы угадали, что

$$4x - 11z = 4(x - y - z) + 1(4y - 7z).$$

Однако угадать коэффициенты нужной нам комбинации не всегда возможно, а когда возможно, то не всегда легко.

Поэтому, чтобы не *гадать на кофейной гуще*, применяют метод неопределённых коэффициентов.

Если поставленная задача имеет решение, то найдутся числа a и b такие, что

$$2x + 10y - 23z = a(x - y - z) + b(4y - 7z).$$

Для того чтобы найти a и b, необходимо, раскрыв скобки, приравнять коэффициенты при неизвестных x, y и z, стоящих в левой и правой частях соответственно.

Итак, имеем

$$2x + 10y - 23z = ax + (4b - a)y + (-a - 7b).$$

Отсюда мы получаем систему уравнений, которым должны удовлетворять числа a и b

$$\begin{cases} a = 2, \\ 4b - a = 10, \\ -7b - a = -23. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы (с учётом, что $a = 2$) получаем, что $b = 3$. Затем, подставляя найденные значения в третье уравнение, приходим к верному равенству: $-21 - 2 = -23$. Это означает, что система, построенная для определения a и b, совместна и

$$2x + 10y - 23z = 2(x - y - z) + 3(4y - z) = 0 + 15 = 15.$$

Ответ: 15.

Глава 5

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Прежде чем приступить к разбору задач тригонометрии, особо подчеркнём, что именно в этом разделе знание формул играет очень важную, если не решающую роль. Поэтому вполне естественно начать раздел с описания ключевых формул, без которых нельзя найти решения тригонометрических уравнений даже в самых простых случаях.

КАК ОПИСАТЬ ВСЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Каждое тригонометрическое уравнение в конечном итоге сводится к одному из следующих четырёх простейших уравнений:

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = b, \quad \operatorname{ctg} x = b.$$

Напомним, как выглядят решения этих уравнений.

Начнём с первого.

Полный набор решений уравнения

$$\sin x = a$$

при

$$|a| \leqslant 1$$

записывается так

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad \text{где} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Если же

$$|a| > 1,$$

то это уравнение решений не имеет.

Набор всех решений уравнения

$$\cos x = a$$

при

$$|a| \leqslant 1$$

можно записать в следующем виде

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad \text{где} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Если же

$$|a| > 1,$$

то это уравнение также решений не имеет.

Перейдём к уравнению

$$\operatorname{tg} x = b.$$

Оно имеет решения при любом b, и набор всех его решений можно записать так:

$$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, \quad \text{где} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

У уравнения

$$\operatorname{ctg} x = b$$

решения также существуют при любом b, и полный набор его решений выглядит так

$$x = \operatorname{arcctg} b + \pi n, \quad \text{где} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Из предложенных решений весьма полезно выделить некоторые частные случаи, когда
a принимает следующие значения:

$$a = 0, \quad a = 1, \quad a = -1, \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

а b — значения

$$b = 0, \quad b = 1, \quad b = -1, \quad b = \sqrt{3}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

и решения записываются особенно просто.

Если

$$\sin x = 1,$$

то

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Если

$$\cos x = 1,$$

то

$$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

При $a = 0$ получаем соответственно:
полный набор решений уравнения
$$\sin x = 0$$
можно записать так
$$x = \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$
а уравнения
$$\cos x = 0$$
так
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$
Наконец, при $a = -1$ все решения уравнения
$$\sin x = -1$$
описываются формулой
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$
а уравнения
$$\cos x = -1$$
формулой
$$x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Выпишем решения для остальных из выделенных случаев.

Начнём с формул для $\cos x$.

Пусть
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Тогда
$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$
Пусть
$$\cos x = \frac{1}{2}.$$
Тогда
$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$
Пусть
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Тогда
$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Теперь — формулы для тех же значений $\sin x$.

Пусть
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$
Тогда
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Пусть
$$\sin x = \frac{1}{2}\,.$$
Тогда
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Пусть
$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$
Тогда
$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Теперь — формулы для $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

Набор соотношений
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$
описывает все решения как уравнения
$$\operatorname{tg} x = 1,$$
так и уравнения
$$\operatorname{ctg} x = 1,$$
а набор соотношений
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$
описывает все решения как уравнения
$$\operatorname{tg} x = -1,$$
так и уравнения
$$\operatorname{ctg} x = -1.$$

Набор
$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$
описывает все решения как уравнения
$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3},$$
так и уравнения
$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\,,$$

а набор

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

описывает все решения как уравнения

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

так и уравнения

$$\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}.$$

Мы умышленно выписали все эти формулы достаточно подробно с целью подчеркнуть важное обстоятельство — за время, потраченное вами на разбор примеров и задач нашего пособия, вам необходимо выучить их наизусть (вызубрить). Позже вы сами сможете убедиться в том, насколько это полезно и удобно — помнить эти формулы, размышляя над тем, с какого конца лучше всего приступать к поиску решений заданной тригонометрической задачи.

К первой группе тригонометрических уравнений отнесем те из них, решения которых можно легко найти, используя одну из известных тригонометрических формул. Среди этих формул нет необычных. С каждой из них вы, без сомнения, уже встречались. Мы приводим их здесь для того, чтобы подтолкнуть вас к необычайно полезному действию —

выучить их наизусть.

Это сильно облегчит поиск решений многих тригонометрических уравнений и поможет избежать досадных ошибок в самом начале решения задачи.

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

(*основное тригонометрическое тождество*),

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y,$$
$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y,$$
$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x\ \operatorname{tg} y}$$

(эта формула справедлива не всегда, а лишь в тех случаях, когда определены $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$ и $\operatorname{tg}(x+y)$),

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

(эта формула справедлива не всегда, а лишь в тех случаях, когда определены $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$),

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

(первая из формул справедлива при условии, что $\cos x \neq 0$, а вторая при условии, что $\sin x \neq 0$),

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2},$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right),$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right),$$
$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right).$$

Конечно, формул выписано немало, но когда они расположены рядом, их запомнить значительно легче, чем вызубривая по одной.

Перейдём теперь к непосредственной задаче этого раздела — описанию путей поиска решений тригонометрических уравнений.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим несколько уравнений, решение которых отыскивается путём непосредственного применения одной из предъявленных выше формул.

Пример 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 2000). Решите уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0.$$

Пусть вас нисколько не смущает то обстоятельство, что задача была предложена на вступительном экзамене по математике (письменно) на одном из математических факультетов Московского университета, — задачка-то лёгкая.

Воспользуемся формулой

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

Это позволит переписать исходное уравнение в виде, более удобном для последующих действий над ним, а именно:

$$2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x = 0.$$

Вынесем общий множитель $\cos x$ за скобку. Имеем

$$\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0.$$

Полученное соотношение выполняется, когда хотя бы один из сомножителей, стоящих в левой части последнего уравнения, равен нулю, т. е.

либо

$$\cos x = 0,$$

либо

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0.$$

Выпишем решение первого из уравнений —

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

а затем и второго, предварительно переписав его в следующем виде

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Имеем

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Учитывая, что

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}\,,$$

запишем окончательный ответ.

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Заметим, что при описании наборов различных решений тригонометрического уравнения разумно использовать для обозначения целочисленных составляющих этих решений разные буквы. Это поможет избежать путаницы и возможных ошибок. В данном примере при описании одной серии решений использовалась буква n, а другой — буква k.

Пример 2 (факультет государственного управления МГУ, 2001). Решите уравнение

$$\sqrt{3}\cos x - 4\cos 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 0.$$

Перегруппируем слагаемые в левой части

$$\sqrt{3}(\cos x + \cos 3x) - 4\cos 2x = 0$$

и, воспользовавшись формулой для суммы косинусов

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\,,$$

преобразуем заданное уравнение к следующему виду

$$2\sqrt{3}\cos 2x\cos x - 4\cos 2x = 0.$$

Вынося общий множитель $\cos 2x$ за скобки, получим

$$\cos 2x(2\sqrt{3}\cos x - 4) = 0.$$

Отсюда видно, что
либо

$$\cos 2x = 0,$$

либо
$$2\sqrt{3}\cos x - 4 = 0.$$

Решения первого уравнения легко находятся —
$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$
и далее
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Что касается второго уравнения, то, приведя его к виду
$$\cos x = \frac{2}{\sqrt{3}},$$
без труда обнаруживаем, что вследствие неравенства
$$\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$$
оно решений не имеет.

Ответ:
$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 3 (химический факультет МГУ, 1996). Решите уравнение
$$5 + \cos 2x = 6\cos x.$$

Применив формулу
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$
приведём тригонометрические функции, помещенные в уравнение, к одному аргументу x и в результате получим, что
$$5 + 2\cos^2 x - 1 - 6\cos x = 0,$$
откуда
$$2\cos^2 x - 6\cos x - 4 = 0$$
и далее
$$\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0.$$

Таким образом, мы привели исходное уравнение к квадратному уравнению относительно $\cos x$.

Здесь удобно воспользоваться заменой переменной (при удачном выборе новой переменной поиск решения исходного уравнения может заметно упроститься).

Положим
$$\cos x = t.$$

Прежде чем вносить соответствующие изменения в рассматриваемое уравнение, отметим, что новая переменная t в отличие от старой переменной x не может принимать любые значения. Более точно — переменная t подчиняется условию

$$-1 \leqslant t \leqslant 1.$$

С учётом предложенной замены находящееся в зоне нашего внимания уравнение оказывается совсем простым

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Его корни

$$t_1 = 1 \quad \text{и} \quad t_2 = 2.$$

Условию

$$-1 \leqslant t \leqslant 1$$

подчиняется лишь первое из найденных значений t. Поэтому, переходя к исходной неизвестной x, мы получаем только одно соотношение, а именно

$$\cos x = 1.$$

Отсюда

$$x = 2\pi n, \quad \text{где} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Мы рассмотрели примеры тригонометрических уравнений, решения которых можно найти путём непосредственного применения формул (которые, как мы надеемся, вы уже почти выучили наизусть) и/или легко усматриваемой замены исходной переменной. Конечно, последнее уравнение можно решать и не прибегая к замене переменной, но если вы попробуете оба подхода (с заменой переменной и без замены), то почти неизбежно согласитесь с нами — с заменой ответ отыскивается проще (и значит, меньше возможностей для ошибок).

Перейдём теперь к рассмотрению тригонометрических уравнений другого типа — к так называемым *однородным* тригонометрическим уравнениям.

Однородными тригонометрическими уравнениями принято называть уравнения следующего вида

$$A \sin x + B \cos x = 0,$$

где

$$A^2 + B^2 > 0$$

(однородные уравнения *первой* степени) и

$$A\cos^2 x + B\sin x\cos x + C\sin^2 x = 0,$$

где

$$A^2 + C^2 > 0$$

(однородные уравнения *второй* степени).

Следует заметить, что к однородному уравнению второй степени можно привести любое уравнение вида

$$A\sin^2 x + B\cos^2 x + C\cos 2x + D\sin 2x + E\sin x\cos x + F = 0,$$

где коэффициенты A, B, C, D, E и F — известные постоянные числа. Достаточно воспользоваться формулами

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

и основным тригонометрическим тождеством

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

Привлекательным свойством однородных уравнений является следующее обстоятельство — наиболее эффективный способ отыскания их решений стандартен и слабо зависит от конкретных значений коэффициентов.

Покажем это, начав с однородного уравнения первой степени

$$A\sin x + B\cos x = 0.$$

В случае, когда один из коэффициентов этого уравнения, A или B, равен нулю, оно легко сводится
либо к уравнению

$$\cos x = 0,$$

если $A = 0$,
либо к уравнению

$$\sin x = 0,$$

если $B = 0$.

Поэтому далее естественно считать, что ни A, ни B нулю не равны.

В этом случае исходное уравнение можно привести к следующему виду

$$\operatorname{tg} x = -\frac{A}{B}.$$

Покажем, что при $A \neq 0$ и $B \neq 0$ деление на $\cos x$ обеих частей рассматриваемого уравнения всегда возможно. В самом деле, допустив $\cos x = 0$, мы сразу же получаем из уравнения, что и $\sin x = 0$. Однако в силу основного тригонометрического тождества,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$\sin x$ и $\cos x$ одновременно быть равными нулю не могут. Тем самым, при переходе к уравнению

$$\operatorname{tg} x = -\frac{A}{B}$$

никаких потерь в решениях не происходит.

Пример 4. Решите уравнение

$$4\cos x + 5\sin x = 0.$$

В этом уравнении оба коэффициента отличны от нуля, и потому оно легко сводится к уравнению

$$\operatorname{tg} x = -\frac{4}{5}\,.$$

Его решение имеет следующий вид

$$x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{5}\right) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

и окончательно

$$x = -\operatorname{arctg}\frac{4}{5} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ:

$$x = -\operatorname{arctg}\frac{4}{5} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Однородное уравнение первой степени, а также уравнение вида

$$A\sin x + B\cos x = C$$

можно решать и по-иному.

Опишем полезный метод введения вспомогательного угла.

Вследствие того, что

$$A^2 + B^2 > 0,$$

левую часть уравнения

$$A\sin x + B\cos x = C$$

можно преобразовать следующим образом

$$A\sin x + B\cos x = \\ = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right).$$

Заметим, что

$$-1 \leqslant \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \leqslant 1$$

и

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1.$$

Поэтому найдется такое число φ, что эти дроби можно представить так —

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\varphi.$$

В случае, когда A и B положительны, этому обстоятельству можно придать простой геометрический смысл: числа

$$A, \quad B, \quad \sqrt{A^2+B^2}$$

суть стороны прямоугольного треугольника, один из острых углов которого равен φ (рис. 5.1).

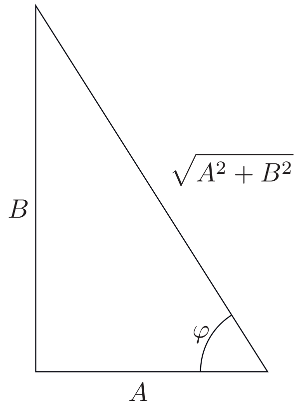


Рис. 5.1

Итак, справедливо представление

$$A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi),$$

откуда

$$A\sin x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi).$$

В результате исходное уравнение приводится к уравнению следующего вида:

$$\sin(x+\varphi) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Вспомогательный аргумент φ можно найти по одной из формул

$$\varphi = \arcsin\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,,$$
$$\varphi = \arccos\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,,$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{B}{A}\,.$$

Пример 5 (физический факультет МГУ, 1994). Решите уравнение

$$2\sin x + 5\cos x = 3.$$

В рассматриваемом случае

$$A = 2, \quad B = 5, \quad A^2 + B^2 = 29.$$

Поэтому заданное уравнение можно преобразовать так:

$$\sqrt{29}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\sin x + \frac{5}{\sqrt{29}}\cos x\right) = 3.$$

Положим

$$\varphi = \arcsin\frac{5}{\sqrt{29}}\,.$$

Это позволит переписать уравнение в следующем виде

$$\sin(x+\varphi) = \frac{3}{\sqrt{29}}\,.$$

Убедившись в том, что

$$\frac{3}{\sqrt{29}} < 1,$$

получаем

$$x + \varphi = (-1)^n \arcsin\frac{3}{\sqrt{29}} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Отсюда легко выписать окончательный ответ.

Ответ:

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{3}{\sqrt{29}} - \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Обратимся к однородным тригонометрическим уравнениям второй степени

$$A \cos^2 x + B \sin x \cos x + C \sin^2 x = 0.$$

В случае, если один из коэффициентов этого уравнения, A или C, обращается в нуль, оно принимает
либо вид

$$B \sin x \cos x + C \sin^2 x = 0,$$

если $A = 0$,
либо вид

$$A \cos^2 x + B \sin x \cos x = 0,$$

если $C = 0$, раскладывается на множители

$$\sin x (B \cos x + C \sin x) = 0$$

и

$$\cos x (A \cos x + B \sin x) = 0$$

соответственно и решается способом, описанным выше.

Поэтому далее будем считать, что ни A, ни C нулю не равны.

Поделим обе части уравнения

$$A \cos^2 x + B \sin x \cos x + C \sin^2 x = 0.$$

на $\cos^2 x$.

Конечно, это деление возможно лишь в случае, когда

$$\cos x \neq 0.$$

Но здесь именно такая ситуация, и вот почему. Предположив, что среди искомых значений неизвестной x есть такие, для которых $\cos x = 0$, мы немедленно получим из рассматриваемого уравнения, что для этих значений и $\sin x = 0$. Однако в силу основного тригонометрического тождества,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

такого просто не может быть.

Тем самым, наше робкое допущение, что деление на $\cos^2 x$ может оказаться неосторожным (и привести к потере части решений), в данной ситуации необоснованно. И, значит, мы можем перейти от рассматриваемого уравнения к уравнению, ему равносильному,

$$A + B\operatorname{tg} x + C\operatorname{tg}^2 x = 0.$$

Естественно напрашивающаяся замена

$$\operatorname{tg} x = t$$

приводит нас к квадратному уравнению

$$Ct^2 + Bt + A = 0,$$

которое в общем случае сводится к двум уравнениям простейшего вида

$$\operatorname{tg} x = b.$$

Пример 6 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1997). Решите уравнение

$$1 - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Данное уравнение сводится к однородному уравнению второй степени

$$\cos^2 x + \sin^2 x - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

После приведения подобных получим

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0.$$

Описанное выше рассуждение о возможности деления обеих частей уравнения на $\cos^2 x$ (или на $\sin^2 x$) стоит повторить, по меньшей мере, по двум причинам.

Причина 1. Лишний раз убедиться в том, что ваши манипуляции с заданным уравнением приводят к уравнению, которое ему равносильно, очень полезно.

Причина 2. Проведённое вами рассуждение покажет проверяющему работу, что вы хорошо разбираетесь в этой задаче, а это, разумеется, тоже полезно.

Поэтому предположим сначала, что $\cos x = 0$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\sin^2 x = 0,$$

или, что равносильно,

$$\sin x = 0.$$

Вследствие того, что вытекающие тем самым из нашего предположения равенства

$$\cos x = 0 \quad \text{и} \quad \sin x = 0$$

не могут выполняться одновременно, мы можем заключить, что высказанное предположение неверно. И значит, в данном уравнении

$$\cos x \neq 0.$$

Таким образом, деление на $\cos^2 x$ возможно, и в результате этого деления мы получаем

$$\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 4 = 0.$$

Полагая

$$\operatorname{tg} x = t,$$

приходим к квадратному уравнению относительно новой неизвестной t

$$t^2 - 3t - 4 = 0.$$

Найдём его корни. Имеем

$$t_1 = -1, \quad t_2 = 4.$$

Возвращаясь к исходной неизвестной x, из первого равенства получаем, что

$$\operatorname{tg} x = -1,$$

и далее

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

а из второго равенства, что

$$\operatorname{tg} x = 4,$$

и соответственно

$$x = \operatorname{arctg} 4 + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ:

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$
$$x = \operatorname{arctg} 4 + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Замечание. Это уравнение можно решить и по-иному, если воспользоваться формулами

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$$

Выразив отсюда $\sin x \cos x$ и $\cos^2 x$, преобразуем исходное уравнение примера 6 и в результате получим

$$1 - \frac{3}{2}\sin 2x - \frac{5}{2}(\cos 2x + 1) = 0,$$

или, что то же,

$$3\sin 2x + 5\cos 2x = 3.$$

Применим к полученному уравнению описанный выше метод введения вспомогательного угла. Имеем

$$\sqrt{34}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\sin 2x + \frac{5}{\sqrt{34}}\cos 2x\right) = 3.$$

Запишем это уравнение в свёрнутом виде

$$\sin(2x + \varphi) = \frac{3}{\sqrt{34}},$$

где

$$\varphi = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}},$$

и далее

$$x = (-1)^n \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{34}} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

При сравнении полученных ответов сразу бросается в глаза их резкое отличие. Тем не менее, они описывают одно и то же множество решений, только описывают по-разному.

Пример 7 (химический факультет МГУ, 1995). Решите уравнение

$$\cos 2x = 2(\cos x + \sin x).$$

Здесь, как и во многих других задачах с тригонометрическими функциями, прежде чем предпринимать какие бы то ни было попытки поиска решений, важно немного поразмышлять, например, перебирая формулы, которые могли бы оказаться полезными в данной задаче.

Возможно, первая из пришедших на ум формул будет эта —

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Попробуем её привлечь. Отметив, что в правой части формулы стоит разность квадратов, представим исходное уравнение в следующем виде:

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = 2(\cos x + \sin x).$$

Перенесём выражение, стоящее в правой части этого уравнения, в левую часть и, вынося за скобки общий множитель, получим

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x - 2) = 0.$$

Это уравнение равносильно паре уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0, \\ \cos x - \sin x = 2 \end{array}\right.$$

вследствие того, что произведение обращается в нуль, если нулю равен хотя бы один из сомножителей.

Первое из этих уравнений равносильно простейшему

$$\operatorname{tg} x = -1,$$

откуда

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Что же касается второго уравнения

$$\cos x - \sin x = 2,$$

то стоит посмотреть на него повнимательнее, а потом задать себе вопрос: возможно ли такое? Иными словами, возможно ли такое, чтобы равенства

$$\cos x = 1 \quad \text{и} \quad \sin x = -1$$

выполнялись одновременно (при других значениях $\cos x$ и $\sin x$ левая часть всегда меньше двух)?

Конечно, нет — потому что это противоречит основному тригонометрическому тождеству

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Ответ:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 8 (геологический факультет МГУ, 1998). Решите уравнение

$$5 + \frac{1}{\sin^2 3x} = 7\operatorname{ctg} 3x.$$

Область допустимых значений (ОДЗ) для этого уравнения определяется из условия

$$\sin 3x \neq 0.$$

Однако начинать поиск решения рассматриваемого уравнения с подробного расписывания этого неравенства в данном случае нецелесообразно (это будет видно по тому, как будут развиваться события, когда мы пойдём предлагаемым ниже путём).

Вглядываясь в заданное уравнение, вспомним формулу

$$\frac{1}{\sin^2 y} = 1 + \operatorname{ctg}^2 y,$$

применение которой позволит преобразовать исходное уравнение к квадратному относительно $\operatorname{ctg} 3x$:

$$\operatorname{ctg}^2 3x - 7\operatorname{ctg} 3x + 6 = 0.$$

Положив

$$\operatorname{ctg} 3x = t$$

(и никаких ограничений на t), получаем

$$t^2 - 7t + 6 = 0.$$

Корни этого уравнения находятся совсем просто — это

$$t_1 = 6 \quad \text{и} \quad t_2 = 1.$$

Возвратимся к исходной переменной x и получим два простейших уравнения для её отыскания

$$\operatorname{ctg} 3x = 6 \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} 3x = 1.$$

Ясно, что ни в том, ни в другом случае $\sin 3x$ в нуль не обращается.

Первое из них равносильно набору

$$3x = \operatorname{arcctg} 6 + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

или, что то же,

$$x = \frac{1}{3}\operatorname{arcctg} 6 + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Решения второго описываются попроще —

$$3x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

или

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Теперь всё готово для выписывания ответа.

Ответ:

$$x = \frac{1}{3}\operatorname{arcctg} 6 + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Опишем класс тригонометрических уравнений, которые путём удачной и чуть менее явной, чем раньше, замены можно сводить к квадратным уравнениям.

Это уравнения вида

$$A \sin 2x = B \sin x + B \cos x + C$$

при условии, что $A \neq 0$ и $B \neq 0$.

Прежде чем пытаться с ходу подвергать заданное уравнение разного рода преобразованиям, посмотрим на следующую весьма полезную формулу

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x,$$

которая легко получается из соотношения

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x.$$

Положив

$$y = \sin x + \cos x,$$

мы сможем привести исходное уравнение к квадратному уравнению относительно этой новой переменной

$$A(y^2 - 1) = By + C,$$

или
$$Ay^2 - By - (A + C) = 0.$$

Дальнейшие действия вполне ясны — мы ищем корни квадратного уравнения относительно неизвестной y и, если они существуют, приходим к двум соотношениям вида
$$\sin x + \cos x = y_1 \quad \text{и} \quad \sin x + \cos x = y_2,$$
поиск решений которых методом введения вспомогательного угла был описан выше.

Аналогичным образом, посредством замены
$$y = \sin x - \cos x,$$
решается уравнение
$$A \sin 2x = B \sin x - B \cos x + C.$$

Пример 9. Решите уравнение
$$\sin 2x = \sin x - \cos x + 1.$$

Воспользуемся тем, что
$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x.$$
Это даёт возможность записать исходное уравнение совсем просто
$$1 - y^2 = y + 1,$$
если положить
$$y = \sin x - \cos x.$$

Обращаясь теперь к квадратному уравнению
$$y^2 + y = 0,$$
легко находим его корни
$$y_1 = 0 \quad \text{и} \quad y_2 = -1.$$

Отсюда получаем, что
$$\sin x - \cos x = 0$$
и
$$\sin x - \cos x = -1.$$

Первое из этих уравнений равносильно простейшему уравнению
$$\operatorname{tg} x = 1,$$

все решения которого описываются набором

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Запишем второе уравнение сначала так:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

а потом так:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда получаем, что

$$x - \frac{\pi}{4} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Если n — чётное, $n = 2k$, то

$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Если n — нечётное, $n = 2l - 1$, то

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbf{Z}.$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbf{Z},$$

$$x = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbf{Z}.$$

Мы описали ряд простых приёмов, использование которых позволяет находить решения некоторых классов тригонометрических уравнений. Вероятно, вы заметили, что в результате их применения нам удавалось сводить исходные уравнения к тригонометрическим уравнениям простейшего вида

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = b, \quad \operatorname{ctg} x = b,$$

непосредственное привлечение которых и давало возможность выписывать окончательный ответ.

Само сведение заданного тригонометрического уравнения к одному или нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям может быть многообразным, и нередко использование одних только тригонометрических формул оказывается недостаточным. Например, к поиску решений в некоторых из разобранных выше задач весьма действенно привлекалось квадратное уравнение, использовались и простые геометрические соображения.

Всё это говорит о том, что тригонометрические уравнения нельзя рассматривать изолированно от других разделов математики. Более того, в задачах вступительных экзаменов по математике часто встречаются тригонометрические уравнения, в которых либо синус, косинус, тангенс и котангенс схвачены знаками модуля, либо из этих тригонометрических функций и их комбинаций извлекаются квадратные корни. Это требует повышенного внимания к свойствам тригонометрических функций и, в частности, к их знакам.

Пример 10. Решите уравнение

$$|\sin x| = \cos x.$$

Увидев в уравнении знаки модуля, попробуем вспомнить действия, которые в соответствующем разделе приводили нас к правильным ответам.

Возможны два случая.

Случай 1. $\sin x \geqslant 0$.

Исходное уравнение принимает вид

$$\sin x = \cos x$$

и сводится к простейшему уравнению

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

решение которого легко выписывается

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Однако часть полученного набора не подчиняется условию, наложенному на знак синуса, и её нужно отбросить, рассуждая, например, так.

Тангенс принимает положительные значения там, где синус и косинус имеют одинаковые знаки, т. е. в первой и в третьей четвертях, а синус неотрицателен в первой и во второй четвертях. Так как оба эти требования на знаки должны выполняться одновременно, то отсюда следует вывод — искомые значения неизвестной в рассматриваемом случае должны располагаться только в первой четверти. Тем самым, нужно оставить все найденные значения неизвестной, в описании которых используется чётный целочисленный множитель $(m = 2k)$, а все найденные значения неизвестной, в описании которых используется нечётный целочисленный множитель, отбросить (они попадают в третью четверть).

В результате получаем

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Случай 2. $\sin x < 0$.

Тогда исходное уравнение принимает вид

$$-\sin x = \cos x,$$

сводится к простейшему

$$\operatorname{tg} x = -1$$

и, следовательно, имеет решение

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

И здесь часть полученного набора приходится отбрасывать как не подчиняющуюся условию, наложенному на синус. Приведём соответствующие рассуждения.

Тангенс принимает отрицательные значения там, где синус и косинус имеют разные знаки, т. е. во второй и в четвёртой четвертях, а синус отрицателен в третьей и в четвёртой. Поэтому нужно оставить все найденные значения неизвестной, в описании которых используется чётный целочисленный множитель ($n = 2l$), и отбросить все значения неизвестной, в описании которых используется нечётный (все они попадают во вторую четверть).

В результате получаем

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi, \quad l \in \mathbf{Z}.$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi, \quad l \in \mathbf{Z}.$$

Конечно, только что разобранный пример нельзя назвать сложным. Однако рассуждения, которые использовались при поиске его решений, показывают, что помимо приведённых выше формул стоит ещё напомнить сведения о знаках тригонометрических функций.

Остановимся на этом подробнее.

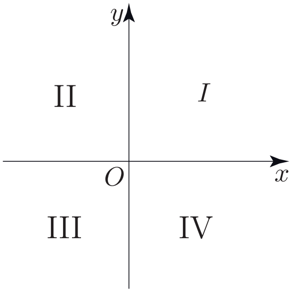


Рис. 5.2

Координатная плоскость Oxy разбивается координатными осями Ox и Oy на четыре *четверти* — I, II, III и IV (рис. 5.2). Каждая из четвертей является областью знакопостоянства основных тригонометрических функций

$$\sin\alpha,\quad \cos\alpha,\quad \operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}\alpha.$$

Сказанное нужно понимать так: если нам известно, в какой из четвертей находится угол α, то мы безошибочно можем определить знак соответствующей функции (см. таблицу и рис. 5.3–5.6).

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	−	−	−
III	−	−	+	+
IV	−	+	−	−

Если же нам известен знак тригонометрических функций

$$\sin\alpha,\quad \cos\alpha,\quad \operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}\alpha,$$

то мы можем указать ограничения, которым непременно подчиняется угол α:

$$\begin{aligned}
&\sin\alpha \geqslant 0: && 2\pi n \leqslant \alpha \leqslant \pi + 2\pi n, && n \in \mathbf{Z},\\
&\sin\alpha \leqslant 0: && \pi + 2\pi n \leqslant \alpha \leqslant 2\pi + 2\pi n, && n \in \mathbf{Z},\\
&\cos\alpha \geqslant 0: && -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n, && n \in \mathbf{Z},\\
&\cos\alpha \leqslant 0: && \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant \alpha \leqslant \frac{3}{2}\pi + 2\pi n, && n \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\alpha \geqslant 0: && \pi k \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, && k \in \mathbf{Z},\\
&\operatorname{tg}\alpha \leqslant 0: && \frac{\pi}{2} + \pi k < \alpha \leqslant \pi + \pi k, && k \in \mathbf{Z},\\
&\operatorname{ctg}\alpha \geqslant 0: && \pi k < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} + \pi k, && k \in \mathbf{Z},\\
&\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 0: && \frac{\pi}{2} + \pi k \leqslant \alpha < \pi + \pi k, && k \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Пример 11 (геологический факультет МГУ, 1995). Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x} = -\cos x.$$

Заметим прежде всего, что извлечение квадратного корня возможно лишь в том случае, когда подкоренное выражение неотрицательно; при этом неотрицательно также и само значение корня.

Отсюда сразу получаем набор условий на искомую неизвестную:

$$\sin x \geqslant 0 \quad \text{и} \quad -\cos x \geqslant 0.$$

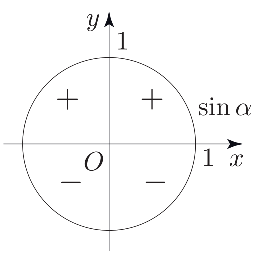


Рис. 5.3

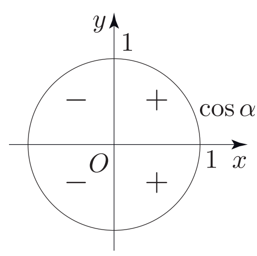


Рис. 5.4

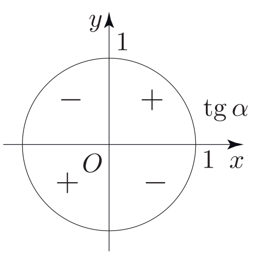


Рис. 5.5

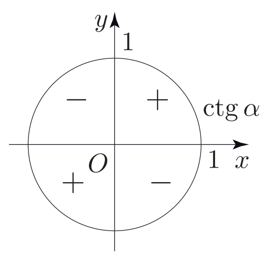


Рис. 5.6

Таким образом, решениями заданного уравнения могут быть только те значения неизвестной x, синус которых неотрицателен, а косинус неположителен. Из приведённой выше таблицы легко обнаружить, что это возможно только во второй четверти

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

При этих условиях обе части исходного уравнения неотрицательны, и возведение в квадрат приведёт к равносильному ему уравнению

$$\sin x = \cos^2 x.$$

Преобразуем его, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

В результате получим квадратное уравнение относительно $\sin x$

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Положив

$$t = \sin x,$$

имеем

$$t^2 + t - 1 = 0.$$

Первый из корней этого уравнения

$$t_1 = -\frac{\sqrt{5+1}}{2} < -1$$

и потому никак нам не подходит.

Второй корень

$$t_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

как не трудно убедиться, удовлетворяет неравенству

$$0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1,$$

и потому уравнение

$$\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

разрешимо.

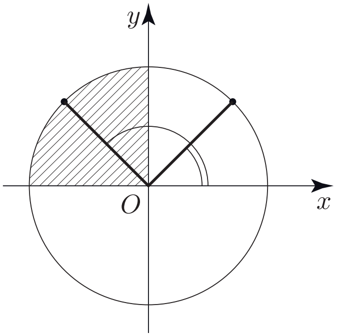


Рис. 5.7

Выпишем полный набор решений этого уравнения. Имеем

$$x = (-1)^m \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

К сожалению, в предъявленном наборе много лишнего — мы выписали значения переменной x без учёта области допустимых значений, а она такова — вторая четверть (рис. 5.7). Поэтому нужно не торопясь посмотреть, в какую из четвертей попадают значения x при разных значениях m.

При чётном m, $m = 2k$, каждое из значений

$$x = \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z},$$

попадает в первую четверть и, следовательно, нам не подходит. Зато при нечётном m, $m = 2k+1$, каждое из значений

$$x = -\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z},$$

попадает во вторую четверть и приносит нам полный набор решений заданного уравнения.

Ответ:

$$x = -\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Замечание. Как видите, анализ значений неизвестной, полученных в этой задаче, требует аккуратности и заметных усилий, но зато и приводит к правильному ответу.

Пример 12. Решите уравнение

$$\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\pi x)}\cos(\pi x)+\sin(\pi x)=\sqrt{2}.$$

При поиске решений этого, достаточно хитрого, уравнения мы подвергнем его преобразованиям, подобным тем, которые применялись в описанном выше методе введения вспомогательного угла.

Чтобы выражение, стоящее под знаком корня в левой части, нас не смущало, обозначим его одной буквой

$$A=\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2(2\pi x)}.$$

Тогда исходное уравнение можно записать так:

$$A\cos(\pi x)+\sin(\pi x)=\sqrt{2},$$

или так:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}\cos(\pi x)+\frac{1}{\sqrt{A^2+1}}\sin(\pi x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A^2+1}}.$$

Теперь выражение в левой части можно записать как

$$\sin(\pi x+\varphi),$$

где φ — некоторая функция от x. Отсюда, в частности, следует, что левая часть последнего уравнения не превосходит 1. В силу равенства этому же требованию должна подчиняться и правая часть

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-\operatorname{ctg}^2(2\pi x)}}=\sqrt{\frac{2}{2-\operatorname{ctg}^2(2\pi x)}}.$$

Нетрудно заметить, что меньше 1 она быть не может, так как знаменатель в последнем подкоренном выражении не превосходит числителя.

Отсюда получаем, что

$$\sin(\pi x+\varphi)=1$$

и

$$\sqrt{\frac{2}{2-\operatorname{ctg}^2(2\pi x)}}=1.$$

Тем самым, если и есть решения у заданного уравнения, то для них должно быть выполнено непременное условие

$$\operatorname{ctg}^2(2\pi x) = 0,$$

при котором исходное уравнение принимает вид

$$\cos(\pi x) + \sin(\pi x) = \sqrt{2}.$$

На основании проведённых рассуждений можно утверждать, что заданное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}^2(2\pi x) = 0, \\ \cos(\pi x) + \sin(\pi x) = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения вытекает, что

$$\cos(2\pi x) = 0,$$

или, что то же,

$$[\cos(\pi x) + \sin(\pi x)][\cos(\pi x) - \sin(\pi x)] = 0.$$

Первый сомножитель в силу второго уравнения системы в нуль не обращается. А из того, что

$$\cos(\pi x) - \sin(\pi x) = 0,$$

вытекает равенство

$$\operatorname{tg}(\pi x) = 1.$$

Тем самым,

$$\pi x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

или

$$x = \frac{1}{4} + n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Нетрудно проверить, что при таком значении x

$$\operatorname{ctg}^2(2\pi x) = 0.$$

Ответ:

$$x = \frac{1}{4} + n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При решении систем тригонометрических уравнений важно помнить, что целочисленные коэффициенты, появляющиеся при описании серий ответов, у каждой из неизвестных должны быть своими (сказанное весьма важно, ибо несоблюдение этого, как правило, приводит к ошибкам).

Пример 13 (экономический факультет МГУ, 1979). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y, \\ \cos 2x = 0. \end{cases}$$

Заметим, что выражение, стоящее в левой части второго уравнения системы, зависит только от одной неизвестной — x, и, следовательно, может быть разрешено без привлечения первого уравнения.

Пользуясь тем, что

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,$$

получаем

$$2\cos^2 x - 1 = 0.$$

Отсюда

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Подставим каждое из найденных значений $\cos x$ в первое уравнение.

Пусть сначала

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда первое уравнение примет вид

$$4\sin y - 6 = 5 + 4\cos^2 y.$$

Выражая $\cos^2 y$ через $\sin^2 y$,

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y,$$

получим уравнение

$$4\sin^2 y + 4\sin y - 15 = 0.$$

Вводя новую неизвестную

$$t = \sin y,$$

и помня о том, что нас могут интересовать только те значения t, которые по абсолютной величине не превосходят единицы, приходим к квадратному уравнению

$$4t^2 + 4t - 15 = 0,$$

корни которого равны соответственно

$$t_1 = -\frac{5}{2}, \quad t_2 = \frac{3}{2}.$$

Оба найденных значения следует отбросить, так как ни одно из них не удовлетворяет условию, поставленному нами при замене переменной,

$$|t| \leqslant 1.$$

Тем самым, при

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

рассматриваемая система решений не имеет.

Пусть теперь

$$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

В этом случае первое уравнение системы примет вид

$$4\sin y + 6 = 5 + 4\cos^2 y.$$

Повторяя описанные выше шаги, приходим к уравнению

$$4t^2 + 4t - 3 = 0,$$

где

$$t = \sin y.$$

Из полученных корней

$$t_3 = -\frac{3}{2}, \quad t_4 = \frac{1}{2}$$

условию

$$|t| \leqslant 1$$

удовлетворяет только один

$$\sin y = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, исходная система оказывается равносильной системе вида

$$\begin{cases} \cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,, \\ \sin y = \dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} x = \pm \arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi n, \\ y = (-1)^k \arcsin\dfrac{1}{2} + \pi k, \end{cases}$$

где

$$n \in \mathbf{Z} \quad \text{и} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Учитывая, что

$$\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

и

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\,,$$

завершаем поиск решений заданной системы.

Ответ:

$$x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2\pi n, \quad y = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Нелишне напомнить, что основной особенностью тригонометрических уравнений является то обстоятельство, что простейшие уравнения

$$\sin x = a \quad \text{и} \quad \cos x = a$$

имеют решения только при условии, что

$$|a| \leqslant 1.$$

То, что об этом никогда не стоит забывать, показывает следующий пример.

Пример 14. Решите уравнение

$$3\sin 2x + 4\cos 5y = 7.$$

Казалось бы, в одном уравнении слишком много неизвестных, сразу две — x и y. Но давайте посмотрим на это уравнение повнимательнее.

Вы, возможно, заметили, что мы уже неоднократно обращали ваше внимание на необходимость немного подумать, прежде чем *штурмовать* предложенную задачу, — просто посидеть несколько минут и попытаться *увидеть* задачу.

Вот как можно сделать это в данном случае.

Итак, посмотрев на задачу повнимательнее, мы увидим, что первое из слагаемых в левой части уравнения ни при каких значениях неизвестной x не может оказаться больше 3, при этом значение 3 достигается лишь тогда, когда

$$\sin 2x = 1.$$

Что касается второго слагаемого, то оно ни при каких значениях неизвестной y не может оказаться больше 4, а равным 4 оно может быть лишь в том случае, когда

$$\cos 5y = 1.$$

Правая же часть заданного уравнения всегда равна 7!

Объединяя сделанные наблюдения, заключаем, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \cos 5y = 1. \end{cases}$$

Выпишем решение этой системы

$$\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ 5y = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

и выражая отсюда x и y, получаем окончательный ответ.

Ответ:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}, \\ y = \dfrac{2}{5}\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Пример 15 (геологический факультет МГУ, 1983). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x - y = 2\pi. \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем неизвестную x через неизвестную y,

$$x = y + 2\pi,$$

и подставляем в первое уравнение. Имеем

$$\cos 4(y + 2\pi) + \sin 2y = -2,$$

или, что то же,

$$\cos 4y + \sin 2y = -2.$$

Нетрудно заметить, что равенство возможно лишь в случае, если

$$\cos 4y = -1 \quad \text{и} \quad \sin 2y = -1.$$

Вспомнив формулу

$$\cos 4y = 1 - 2\sin^2 2y,$$

из первого уравнения получаем, что

$$\sin^2 2y = 1.$$

Это соотношение выполняется для всех значений переменной y, являющихся решениями второго уравнения

$$\sin 2y = -1.$$

Отсюда получаем, что

$$2y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

или

$$y = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Осталось найти соответствующие значения неизвестной x. Вот они

$$x = \frac{7\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ:

$$x = \frac{7\pi}{4} + \pi n, \quad y = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Пример 16. Решите уравнение

$$4\sin 3x + 3\cos 4x = 7.$$

Вашему натренированному глазу уже нетрудно заметить, что равенство возможно лишь в случае, когда

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \cos 4x = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем, что

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

а из второго, что

$$4x = 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Если умножить обе части последней формулы на 3, а предпоследней на 4, то тогда их левые части совпадут. Отсюда следует, что совпадают и правые части —

$$2\pi + 8\pi n = 6\pi k.$$

Это означает, что числа n и k не могут изменяться независимо одно от другого, а имеет место равенство

$$1 + 4n = 3k.$$

Полученное соотношение связывает многие пары чисел n и k. Покажем, как можно найти все такие пары.

1-й шаг. Подберём какое-нибудь частное решение последнего уравнения, например, $n = 2$, $k = 3$,

$$1 + 4 \cdot 2 = 3 \cdot 3,$$

вычтем полученное равенство из предыдущего и выпишем результат

$$4(n - 2) = 3(k - 3).$$

2-й шаг. Теперь небольшое рассуждение: левая часть равенства делится на 4, значит, и его правая часть должна делиться на 4, а так как 3 и 4 общих множителей (кроме 1) не имеют, то на 4 должен делиться второй сомножитель правой части, т. е. $k - 3$. Это можно записать так

$$k - 3 = 4p.$$

Заменяя в предыдущем равенстве $k - 3$ на $4p$, получаем

$$4(n - 2) = 12p,$$

откуда

$$n - 2 = 3p.$$

3-й шаг. Подведём итог проведённому рассуждению:

$$n = 3p + 2, \quad k = 4p + 3, \quad p \in \mathbf{Z}.$$

Заменяя теперь в выражении для $3x$ числовой параметр n на p, можно записать окончательный ответ в исходной задаче

$$3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi(3p + 2), \quad p \in \mathbf{Z},$$

или

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi p, \quad p \in \mathbf{Z}.$$

Замена числового параметра k на p в выражении для $4x$ приводит, вне всяких сомнений, к тому же результату —

$$4x = 2\pi(4p + 3), \quad p \in \mathbf{Z}$$

и

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi p, \quad p \in \mathbf{Z}.$$

Ответ:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi p, \quad p \in \mathbf{Z}.$$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Вернёмся к простейшим тригонометрическим уравнениям

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = b, \quad \operatorname{ctg} x = b.$$

Нам известно, что в силу периодичности тригонометрических функций угол x в каждом из этих уравнений определён неоднозначно. Иными словами, из равенства вида

$$\sin x = \sin y,$$

или

$$\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v$$

нельзя делать вывод о том, что

$$x = y,$$

или

$$u = v.$$

Тем самым, совершенно разные углы могут иметь одинаковые синусы или тангенсы

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{41}{4}\,\pi.$$
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg}\frac{34}{3}\,\pi.$$

Поэтому неудивительно, что полный набор решений простейших тригонометрических уравнений описывается не так-то просто, а именно:

$$\begin{aligned}
&x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\\
&x = \pm\arccos a + 2\pi n,\\
&x = \operatorname{arctg} b + \pi n,\\
&x = \operatorname{arcctg} b + \pi n,
\end{aligned}$$

где $n \in \mathbf{Z}$.

И здесь вполне естествен вопрос, какие именно углы выделены в виде

$$\arcsin a, \quad \arccos a, \quad \operatorname{arctg} b, \quad \operatorname{arcctg} b$$

и по каким правилам выбираются они из всего множества углов, описывающих решения этих уравнений.

Напомним основные определения.

Арксинусом числа a, $-1 \leqslant a \leqslant 1$, называется число φ, подчинённое двум условиям

$$\sin\varphi = a \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\,.$$

Арккосинусом числа a, $-1 \leqslant a \leqslant 1$, называется число φ, подчинённое двум условиям

$$\cos\varphi = a \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Арктангенсом числа b называется число φ, подчинённое двум условиям

$$\operatorname{tg}\varphi = b \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\,.$$

Арккотангенсом числа b называется число φ, подчинённое двум условиям

$$\operatorname{ctg}\varphi = b \quad \text{и} \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Пример 17. Найдите $\arccos(\cos 10)$.

Задание этого примера можно сформулировать и так: в промежутке

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

нужно найти число, косинус которого совпадает с $\cos 10$.

Ясно, что само число 10 здесь не годится (в силу неравенства $\pi < 10$).

Попробуем найти нужное нам число, вычитая из 10 число, кратное π и такое, чтобы результат попадал в отрезок $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Полагаем, что каждый помнит такое приближённое значение π,

$$\pi \approx 3{,}14.$$

Для наших целей первых двух верных знаков после запятой вполне достаточно.

Пользуясь этим приближённым равенством, легко вычислить, что

$$9{,}42 = 3 \cdot 3{,}14 < 3\pi < 10 < \frac{7}{2} \cdot 3{,}14 = 10{,}99 < \frac{7\pi}{2}\,.$$

Из того, что

$$3\pi < 10 < \frac{7\pi}{2}\,,$$

вытекает оценка

$$\cos 10 < 0,$$

и значит, искомое значение нужно искать в интервале

$$\left(\frac{\pi}{2}\,, \pi\right).$$

Имеем

$$\cos 10 = \cos(10 - 4\pi) = \cos(4\pi - 10)$$

(мы воспользовались здесь чётностью косинуса).

Угол

$$4\pi - 10 \approx 4 \cdot 3{,}14 - 10 = 2{,}56$$

попадает в интересующий нас интервал

$$\frac{\pi}{2} < 4\pi - 10 < \pi,$$

что и позволяет записать окончательный ответ.

Ответ: $\arccos(\cos 10) = 4\pi - 10$.

Замечание. Как видите, поиск правильного решения в этом примере оказался довольно хлопотным. Это не должно вас удивлять, и вот почему. Так бывает, когда приходится сравнивать числа, записанные по-разному. Например, значительно проще сравнить числа 13,425 и 13,452, чем выяснить, какое из чисел, $\sqrt{3}$ или $\frac{7}{4}$, больше. То же можно сказать о сравнении чисел π и $\sqrt{10}$.

Разберём теперь задачку немного потруднее.

Пример 18 (экономический факультет МГУ, 1999). Решите уравнение

$$x + \frac{1}{6}\arccos(\cos 15x + 2\cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{12}\,.$$

Начнём с описания области допустимых значений (ОДЗ). По определению арккосинуса, его аргумент должен быть заключён между -1 и 1. В рассматриваемом случае это требование выглядит так:

$$-1 \leqslant \cos 15x + 2\cos 4x \sin 2x \leqslant 1.$$

Записывая заданное уравнение в виде, более удобном для последующих преобразований,

$$\arccos(\cos 15x + 2\cos 4x \sin 2x) = \frac{\pi}{2} - 6x,$$

замечаем, что значения выражения в правой части по определению арккосинуса не должны выходить за пределы отрезка $[0, \pi]$.

В данном случае это можно записать в виде неравенства

$$0 \leqslant \frac{\pi}{2} - 6x \leqslant \pi,$$

откуда

$$-\frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{12}\,.$$

Вычисляя косинусы левой и правой частей последнего уравнения и пользуясь определением арккосинуса, получим

$$\cos 15x + 2\cos 4x \sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right).$$

Сразу же отметим, что в силу этого соотношения для любого из найденных решений первое из неравенств, формирующее ОДЗ, будет выполняться автоматически.

Последнюю формулу можно записать попроще, если вспомнить, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = \sin 6x$$

и

$$2\cos 4x \sin 2x = \sin 6x - \sin 2x.$$

Имеем

$$\cos 15x + \sin 6x - \sin 2x = \sin 6x,$$

откуда

$$\cos 15x - \sin 2x = 0.$$

Разность в левой части этого уравнения можно перевести в произведение, воспользовавшись равенством

$$\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

и формулой для разности косинусов

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,.$$

В результате получим, что

$$\sin\left(\frac{13}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{17}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\dfrac{13}{2}x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \sin\left(\dfrac{17}{2}x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Переходя к полным наборам решений этих уравнений, получаем

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{13}{2}x + \dfrac{\pi}{4} = \pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ \dfrac{17}{2}x - \dfrac{\pi}{4} = \pi k, & k \in \mathbf{Z}, \end{array}\right.$$

или

$$\left[\begin{array}{ll} x = \dfrac{2}{13}\left(\pi n - \dfrac{\pi}{4}\right), & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \dfrac{2}{17}\left(\pi k + \dfrac{\pi}{4}\right), & k \in \mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Настала пора вспомнить о том, что

$$-\frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{12}.$$

Поочередно подставляя в это неравенство найденные значения неизвестной, получим соответственно

$$-\frac{\pi}{12} \leqslant \frac{2}{13}\left(\pi n - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\pi}{12}$$

и

$$-\frac{\pi}{12} \leqslant \frac{2}{17}\left(\pi k + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\pi}{12}.$$

Отсюда

$$-\frac{1}{12} \leqslant \frac{2}{13}\left(n - \frac{1}{4}\right) \leqslant \frac{1}{12},$$
$$-\frac{1}{12} \leqslant \frac{2}{17}\left(k + \frac{1}{4}\right) \leqslant \frac{1}{12},$$

и далее

$$-\frac{7}{24} \leqslant n \leqslant \frac{19}{24},$$
$$-\frac{23}{24} \leqslant k \leqslant \frac{11}{24}.$$

Первому из условий подчиняется только $n = 0$, а второму только $k = 0$.

Ответ:

$$x = -\frac{\pi}{26}, \quad x = \frac{\pi}{34}.$$

Конечно, только что рассмотренную задачу простой назвать трудно. Но если вы добрались до этого места, разобравшись с большинством представленных выше задач, то и эта вам будет по силам.

Глава 6

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Задачи с параметрами традиционно вызывают у поступающих наибольшие затруднения. Правда, неудачи при решении таких задач часто обусловлены лишь страхом перед ними, а также не совсем правильным пониманием того, как следует записывать полученный ответ.

Решить уравнение или неравенство с параметром — это значит найти решения для целого семейства соответствующих уравнений или неравенств, которые возникают, если подставлять вместо параметра конкретные числа. Поэтому и ответ должен фактически указывать решения для каждого из допустимых по условию задачи значений параметра.

Параметр в задаче — это неизвестная нам величина, которую мы предполагаем известной. Поэтому при формулировке задачи обычно указывается, какая из переменных величин принимается за параметр. Обычно это первые буквы латинского алфавита — a, b или c, но встречаются и другие обозначения.

Пожелание. При решении задачи с параметром, пусть даже и очень простой, не торопитесь — внимательность, аккуратность и неспешливость здесь особенно важны.

Чтобы лучше прояснить суть дела, начнём с рассмотрения самых простых примеров.

Пример 1. Решите уравнение с параметром a

$$ax = a - 1.$$

Из условия задачи следует, что для каждого действительного числа a нас просят либо указать значение неизвестной x, удовлетворяющее заданному уравнению, либо обосновать, что таких значений у неизвестной не существует. Если бы на месте параметра a стояло конкретное число, например, 100 или 1000, то мы, не раздумывая, поделили бы на него обе части уравнения и получили, таким образом, искомое значение переменной. Но в данном случае на месте, занятом параметром a, может стоять любое действительное число!

Поэтому вполне естествен вопрос — существует ли какой-нибудь универсальный способ решения поставленной задачи, пригодный для произвольно взятого значения параметра a?

Ответ также вполне ожидаем: для данного уравнения такого способа нет, и нужно отдельно рассмотреть два случая:

- когда деление обеих частей уравнения на коэффициент при неизвестной x невозможно, $a = 0$, и
- когда такое деление возможно, $a \neq 0$.

Случай 1. Пусть $a = 0$. Тогда исходное уравнение принимает вид

$$0 \cdot x = -1.$$

Полученное равенство не выполняется ни при каких значениях переменной x, и, значит, в этом случае уравнение иметь решений не будет.

Случай 2. Если же $a \neq 0$, то деление обеих частей уравнения на a приводит к уравнению, равносильному исходному, и это не позволяет нам ни потерять каких-либо решений, ни приобрести посторонних.

Поделив на a, получаем, что

$$x = \frac{a-1}{a}.$$

Теперь нужно правильно записать ответ (в задачах с параметром это необходимо делать внимательно и с особой тщательностью).

Ответ: если $a = 0$, то решений нет,
если $a \neq 0$, то

$$x = \frac{a-1}{a}.$$

Сформулируем важный вывод, вытекающий из анализа процесса поиска решений этого уравнения:

при решении задач с параметрами любое преобразование уравнения или неравенства необходимо проводить очень осторожно, аккуратно выявляя те из допустимых значений параметра, при которых это преобразование может и не привести к уравнению или неравенству, равносильному исходному. Затем отдельно рассмотреть исходное уравнение или неравенство при каждом из выявленных значений параметра, *покушающихся на равносильность*, и уже потом проводить задуманное преобразование.

Рассмотрим чуть более сложное уравнение.

Пример 2. Решите уравнение с параметром a

$$(a^2-4)(x-1)^2 = a-2.$$

Прежде чем делить обе части этого уравнения на a^2-4, необходимо разобраться со случаем, когда деление невозможно, т. е. со случаем

$$a^2-4=0.$$

Это равенство выполняется при двух значениях параметра — при $a=2$ и при $a=-2$.

Случай A. Пусть $a=2$. Тогда имеем

$$0\cdot(x-1)^2=0.$$

В этом случае нашему уравнению удовлетворяет любое действительное значение неизвестной x.

Случай B. Если $a=-2$, то уравнение принимает вид

$$0\cdot(x-1)^2=-4,$$

и решений у него в этом случае не будет.

Случай C. При $a\neq\pm2$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x-1)^2=\frac{a-2}{a^2-4}\,,$$

или

$$(x-1)^2=\frac{1}{a+2}\,.$$

Казалось бы, теперь нам осталось извлечь корень из обеих частей получившегося уравнения и найти искомое значение неизвестной.

Однако при всех ли значениях параметра это можно сделать? Оказывается, нет. Возможны два случая.

С-1. При $a < -2$ уравнение решений не имеет, поскольку левая часть уравнения при всех значениях неизвестной неотрицательна, а правая, напротив, меньше нуля.

С-2. Если же $-2 < a < 2$ или $a > 2$, то последнее уравнение равносильно следующему

$$|x-1| = \sqrt{\frac{1}{a+2}}.$$

Полученное уравнение при всех указанных в этом случае значениях параметра a

$$\left[\begin{array}{l} -2 < a < 2, \\ a > 2, \end{array}\right.$$

равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x-1 = \sqrt{\dfrac{1}{a+2}}, \\ x-1 = -\sqrt{\dfrac{1}{a+2}}. \end{array}\right.$$

Следовательно, в случае С-2 исходное уравнение имеет два решения

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{a+2}} + 1 \quad \text{и} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{1}{a+2}} + 1.$$

Теперь осталось правильно записать ответ, не забыв при этом ни одного из значений параметра a.

Ответ: если $a \leqslant -2$, то решений нет;
если $-2 < a < 2$, то

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{a+2}} + 1,$$

если $a = 2$, то решением является любое действительное число; если $a > 2$, то

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{a+2}} + 1;$$

Пример 3 (геологический факультет МГУ, отделение геофизики, 1979). Для каждого значения параметра a найдите все x, удовлетворяющие равенству

$$\frac{a}{2a - x} = 3.$$

Хочется умножить обе части уравнения на $2a - x$. Однако и в этой задаче следует действовать очень осторожно, чтобы при некоторых значениях параметра не приобрести посторонних корней.

Поэтому, заметив, что $2a - x \neq 0$, можно утверждать, что исходное уравнение равносильно следующей системе

$$\begin{cases} a = 3(2a - x), \\ 2a - x \neq 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \dfrac{5a}{3}, \\ x \neq \dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

Равенство

$$\frac{5a}{3} = \frac{a}{2}$$

выполнено при $a = 0$.

Из этого можно сделать следующий вывод: при $a = 0$ исходное уравнение решений не имеет, а при $a \neq 0$ это уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{5a}{3}.$$

Ответ: при $a = 0$ решений нет,
при $a \neq 0$

$$x = \frac{5a}{3}.$$

Пример 4. Решите уравнение с параметром a

$$(x^2 - x - 6)\sqrt{x + a} = 0.$$

Легко заметить, что уравнение имеет решение

$$x = -a$$

при любом a. Кроме этого, уравнению удовлетворяют все значения переменной x, обращающие в нуль квадратный трёхчлен

$$x^2 - x - 6$$

(а это числа 3 и -2), правда лишь при условии, что квадратный корень в правой части уравнения имеет смысл!

Поэтому заданное уравнение имеет решение $x = 3$ только при $3 + a \geqslant 0$, т. е. при $a \geqslant -3$.

В свою очередь, $x = -2$, будет решением уравнения при $a \geqslant 2$.

Теперь сосредоточимся на том, чтобы правильно записать ответ. Здесь также важно проявить наблюдательность. Заметим, например, что при $a \geqslant 2$ решениями уравнения будут как $x = 2$, так и $x = -3$. И про $x = -a$ при этом тоже не забудем!

Ответ: если $a < -3$, то $x = -a$,
если $-3 \leqslant a < 2$, то $x_1 = -a$ и $x_2 = 3$,
если $a \geqslant 2$, то $x_1 = -a$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$.

Пример 5. Решите уравнение с параметром a

$$x + 2 + a|x - 1| = 0.$$

Чтобы раскрыть модуль, необходимо рассмотреть два случая.

Случай А. Пусть $x < 1$. Тогда заданное уравнение примет вид

$$x + 2 - ax + a = 0.$$

После приведения подобных получим

$$x(a - 1) = a + 2.$$

И вновь будем неторопливо рассуждать, помня о том, что не всегда *естественно напрашивающееся* преобразование приводит к уравнению, равносильному исходному.

А-1. Если $a = 1$, то

$$0 \cdot x = 3$$

и, следовательно, в этом случае решений нет.

А-2. Если же $a \neq 1$, то, поделив обе части уравнения на $a-1$, получим, что

$$x = \frac{a+2}{a-1}\,.$$

Здесь мы просто обязаны вспомнить о том, что это значение неизвестной найдено при условии, что

$$x < 1,$$

и потому удовлетворяет заданному уравнению лишь при тех значениях a, которые подчиняются неравенству

$$\frac{a+2}{a-1} < 1,$$

а это все $a < 1$ (и только они, так как умножив при $a > 1$ обе части последнего неравенства на $a-1$, получаем $2 < -1$, что невозможно).

Теперь можно перейти и к рассмотрению второго случая.

Случай B. Пусть $x \geqslant 1$. Раскрывая модуль и приводя подобные, получим уравнение

$$x(a+1) = a-2.$$

B-1. При $a=-1$ решений нет, так как

$$0 \cdot x = -3.$$

B-2. При $a \neq -1$ получаем, что

$$x = \frac{a-2}{a+1}\,.$$

Найденное значение неизвестной будет решением заданного уравнения, если

$$\frac{a-2}{a+1} \geqslant 1.$$

Это неравенство выполняется при всех $a < -1$ (и только при них, так как умножая при $a > -1$ обе части последнего неравенства на $a+1$, получим $-2 \geqslant 1$, что невозможно).

Попробуем теперь собрать результаты по всем рассмотренным случаям и постараемся правильно записать ответ (не упустив при этом ни одного из значений параметра).

Успешность нашего предприятия достигается лишь при внимательном анализе полученных результатов. Заметим, например, что при $a < -1$ решениями будут и выражение, полученное в случае А,

$$\frac{a+2}{a-1},$$

и выражение, полученное в случае В,

$$\frac{a-2}{a+1}.$$

Ответ: если $a < -1$, то

$$x_1 = \frac{a+2}{a-1}, \qquad x_2 = \frac{a-2}{a+1},$$

если $-1 \leqslant a < 1$, то

$$x = \frac{a+2}{a-1},$$

при $a \geqslant 1$ уравнение решений не имеет.

Перейдём к решению неравенств с параметром, также начав с рассмотрения простейшего примера.

Пример 6. Решите неравенство с параметром a

$$(a-2)x < a+2.$$

По аналогии с решением уравнений с параметром здесь также вполне логично вначале рассмотреть случай, когда коэффициент при неизвестной обращается в нуль.

Случай А. Пусть $a = 2$. Тогда исходное неравенство примет вид

$$0 \cdot x < 4,$$

и любое значение переменной x является его решением.

Случай В. Пусть $a \neq 2$. Действия *строго по аналогии* с последовательностью действий по поиску решений уравнения (как в примере 1) приведут нас к грубейшей ошибке вследствие того, что деление обеих частей неравенства на отличное от нуля число приводит к равносильному неравенству только в том случае, когда мы учитываем знак этого числа! Поэтому случаи $a-2<0$ и $a-2>0$ необходимо рассматривать отдельно.

В-1. Пусть $a<2$. Поделив обе части неравенства на $a-2$, $a-2<0$, и поменяв знак неравенства на противоположный, получим неравенство, равносильное исходному,

$$x>\frac{a+2}{a-2}\,.$$

В-2. Если $a>2$, то при делении обеих частей неравенства на $a-2$, $a-2>0$, его знак не изменится и мы получим, что

$$x<\frac{a+2}{a-2}\,.$$

Записать ответ в данной задаче достаточно просто.

Ответ: при $a=2$ решением является любое действительное число;
если $a<2$, то

$$x>\frac{a+2}{a-2}\,;$$

если $a>2$, то

$$x<\frac{a+2}{a-2}\,.$$

Пример 7 (физический факультет МГУ, 1997). Для любых значений a решите неравенство

$$a-2<(a-1)\sqrt{x+1}.$$

Сначала перепишем неравенство, поместив квадратный корень слева

$$(a-1)\sqrt{x+1}>a-2,$$

а затем перейдём к поиску его решений при различных значениях параметра.

Случай А. При $a=1$ последнее неравенство принимает вид

$$0\cdot\sqrt{x+1}>-1$$

и выполнимо при всех тех значениях неизвестной, при которых квадратный корень имеет смысл, т. е. при $x\geqslant -1$.

Случай B. Пусть $a < 1$. Поделив обе части неравенства на разность $a - 1$ и поменяв его знак на противоположный переходим к равносильному неравенству

$$\sqrt{x+1} < \frac{a-2}{a-1}\,.$$

Чтобы теперь найти искомое значение неизвестной x, нужно возвести обе части неравенства в квадрат. Вспомним, однако, что это можно делать лишь в том случае, если обе части неравенства неотрицательны!

Левая часть больше или равна нулю при всех значениях переменной x, при которых квадратный корень имеет смысл, т. е. при $x \geqslant -1$.

Что касается правой части, то при $a < 1$ (а мы рассматриваем сейчас именно этот случай) и числитель, и знаменатель дроби строго меньше нуля. Таким образом, при $a < 1$ правая часть неравенства положительна.

Значит, рассматриваемое неравенство для всех $a < 1$ в области допустимых значений (ОДЗ), т. е. при $x \geqslant -1$, равносильно неравенству

$$x + 1 < \frac{(a-2)^2}{(a-1)^2}\,,$$

откуда вытекает ещё одно ограничение на переменную

$$x < \frac{(a-2)^2}{(a-1)^2} - 1.$$

Учитывая ОДЗ, получаем, что при $a < 1$ решениями исходного неравенства являются все значения неизвестной, подчинённые условию

$$-1 \leqslant x < \frac{(a-2)^2}{(a-1)^2} - 1.$$

Случай C. При $a > 1$ деление на $a-1$ без изменения знака неравенства приводит его к равносильному

$$\sqrt{x+1} > \frac{a-2}{a-1}\,.$$

Здесь, в свою очередь, приходится рассматривать два случая.

Поскольку при сделанном предположении $a > 1$ знаменатель дроби в правой части неравенства $a - 1 > 0$, то её знак определяется знаком числителя $a - 2$.

С-1. При $1 < a < 2$ правая часть неравенства отрицательна, тогда как левая, напротив, больше либо равна нулю при всех $x \geqslant -1$. Поэтому в этом случае решениями неравенства являются все $x \geqslant -1$.

С-2. При $a \geqslant 2$ обе части неравенства в ОДЗ неотрицательны, и потому их одновременное возведение в квадрат приводит к равносильному неравенству

$$x + 1 > \frac{(a-2)^2}{(a-1)^2},$$

откуда получаем ещё одно условие на искомую величину

$$x > \frac{(a-2)^2}{(a-1)^2} - 1.$$

Теперь осталось аккуратно записать ответ, как всегда, не упустив из виду ни одного из значений параметра a.

Ответ: если $a < 1$, то

$$-1 \leqslant x < \frac{(a-2)^2}{(a-1)^2} - 1,$$

если $1 \leqslant a < 2$, то $x \geqslant -1$,
если $a \geqslant 2$, то

$$x > \frac{(a-2)^2}{(a-1)^2} - 1.$$

Пример 8 (факультет почвоведения МГУ, 1997). Для каждого значения параметра c решите неравенство

$$\sqrt{c^2 - x^2} \geqslant 2 - c.$$

Случай А. При $c \leqslant 2$ обе части неравенства неотрицательны, и потому их одновременное возведение в квадрат приводит к неравенству, равносильному исходному

$$c^2 - x^2 \geqslant (2-c)^2.$$

Заметим, что при этом требование неотрицательности подкоренного выражения, а именно

$$c^2 - x^2 \geqslant 0,$$

удовлетворяется автоматически. После приведения подобных неравенство примет вид

$$x^2 \leqslant 4c - 4.$$

Здесь вновь весьма уместно напомнить, что при решении неравенств с параметром никогда не следует торопиться. И, посмотрев на правую часть неравенства повнимательнее, мы увидим, что область возможных значений параметра c естественно разбивается на две части

$$c < 1 \quad \text{и} \quad 1 \leqslant c \leqslant 2.$$

А-1. Как легко убедиться, при $c < 1$ наше неравенство решений иметь не будет.

А-2. При $1 \leqslant c \leqslant 2$ решениями будут все значения переменной x, подчинённые неравенству

$$-\sqrt{4c-4} \leqslant x \leqslant \sqrt{4c-4}.$$

Случай В. При $c > 2$ правая часть исходного неравенства меньше нуля. Поэтому его решениями в этом случае будут все те значения неизвестной x, при которых левая часть неравенства имеет смысл (напомним, что тогда она неотрицательна).

Чтобы найти эти значения, необходимо решить неравенство

$$c^2 - x^2 \geqslant 0.$$

Его решения заполняют промежуток

$$-c \leqslant x \leqslant c.$$

Ответ: при $c < 1$ неравенство решений не имеет, если $1 \leqslant c \leqslant 2$, то

$$-\sqrt{4c-4} \leqslant x \leqslant \sqrt{4c-4},$$

если $c > 2$, то $-c \leqslant x \leqslant c$.

На вступительном экзамене может встретиться и система с параметром.

Пример 9. Решить систему с параметром a

$$\begin{cases} ax - y = 2, \\ x - ay = 2. \end{cases}$$

Выразим неизвестную y из первого уравнения

$$y = ax - 2$$

и подставим во второе. В результате получим

$$x - a(ax - 2) = 2,$$

или, после приведения подобных,

$$x(1 - a^2) = 2(1 - a).$$

Для отыскания решений уравнения относительно неизвестной x нужно разобрать несколько случаев.

Случай А. При $a = 1$ уравнение принимает вид

$$0 \cdot x = 0,$$

и любое действительное число, подставленное в эту формулу вместо x, спокойно подчиняется этому условию.

Поэтому множество решений системы в этом случае можно записать так:

$$x = t, \quad y = t - 2,$$

где t пробегает все действительные значения.

Случай В. При $a = -1$ получаем уравнение

$$0 \cdot x = 4,$$

которое не выполняется ни при каких значениях неизвестной.

Следовательно, в этом случае исходная система решений не имеет.

Случай С. Совсем легко убедиться, что при a, отличных от ± 1,

$$x = \frac{2(1 - a)}{1 - a^2},$$

или
$$x = \frac{2}{1+a}\,.$$
При этом
$$y = \frac{2a}{1+a} - 2 = -\,\frac{2}{1+a}\,.$$

Ответ: если $a = 1$, то
$$x = t, \quad y = t - 2,$$
где t — любое действительное число;
при $a = -1$ система решений не имеет;
если $a \neq \pm 1$, то
$$x = \frac{2}{1+a}\,, \quad y = -\,\frac{2}{1+a}\,.$$

Задач с параметрами, предлагаемых абитуриентам, много. Они разнятся между собой и порой достаточно сильно. В заключение раздела мы рассмотрим две задачи с параметром с несколько необычными условиями.

Пример 10 (экономический факультет МГУ, 1978). Найдите все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений
$$\begin{cases} bx + 2y = b + 2, \\ 2bx + (b+1)y = 2b + 4 \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

Здесь мы столкнулись с необычной формулировкой задачи с параметром — в ней не требуется найти все возможные значения переменных x и y. Поэтому полезно переформулировать задачу в более привычном для вас виде.

Прежде всего заметим, что в условии задана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y. А ранее (в разделе, посвященном алгебраическим системам) было отмечено, что у таких систем

- либо ровно одно решение,
- либо множество решений бесконечно,
- либо решений нет.

В этой задаче нас спрашивают о тех значениях параметра, при которых система имеет

- либо единственное решение,
- либо бесконечное множество решений.

Иными словами, нужно отбросить все те значения параметра b, при которых система несовместна.

Исключим неизвестную x, умножив первое уравнение на -2 и сложив результат со вторым уравнением.

После приведения подобных получим уравнение относительно y

$$(b-3)y=0,$$

которое справедливо либо при $y=0$, либо при $b=3$.

Если $y=0$, то из первого уравнения получаем, что

$$bx=b+2.$$

Ясно, что при $b=0$ решений нет (равенство $0=2$ невозможно). При остальных же значениях параметра b

$$x=\frac{b+2}{b}\,.$$

Таким образом, при любом $b\neq 0$ исходная система имеет, по крайней мере, одно решение

$$x=\frac{b+2}{b}\,,\quad y=0.$$

Замечание. Случай $b=3$ можно уже не рассматривать — ведь при этом значении параметра, как мы выяснили, система имеет, по крайней мере, одно решение. (На самом деле, при этом значении b система имеет бесконечное множество решений, но в задании нас об этом не спрашивают).

Остаётся отдельно рассмотреть случай $b=0$.

При этом значении параметра исходная система принимает вид

$$\begin{cases} 2y=2,\\ \ \ y=4. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что выписанная система несовместна, поскольку из первого уравнения следует равенство $y=1$, а из второго — $y=4$.

Тем самым, при $b=0$ заданная система решений не имеет.

Ответ: система имеет хотя бы одно решение при всех $b \neq 0$. При $b = 0$ система решений не имеет.

Пример 11 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1995). Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$x^2 + 4x + 6a|x+2| + 9a^2 \leqslant 0$$

имеет не более одного решения.

В этой задаче нас просят указать те значения параметра, при которых неравенство либо вовсе не имеет решений, либо имеет ровно одно решение.

Многие задачи подобного вида решаются при помощи специального приёма — выделения в левой части уравнения или неравенства полного квадрата (этот приём часто бывает очень полезен, и его следует хорошо запомнить).

Поскольку

$$x^2 + 4x + 6a|x+2| + 9a^2 = (x+2)^2 + 6a|x+2| + 9a^2 - 4$$

и

$$(x+2)^2 = |x+2|^2,$$

левая часть неравенства оказывается равной

$$(|x+2| + 3a)^2 - 4.$$

Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству

$$(|x+2| + 3a)^2 \leqslant 4,$$

которое, в свою очередь, равносильно двойному неравенству

$$-2 \leqslant |x+2| + 3a \leqslant 2,$$

или

$$-2 - 3a \leqslant |x+2| \leqslant 2 - 3a.$$

В силу того, что абсолютная величина любого выражения всегда неотрицательна, это неравенство при

$$2 - 3a < 0,$$

решений иметь не будет.

Если $2 - 3a = 0$, то решение будет только одно: $x = -2$.

При $a < 2/3$ множество значений неизвестной будет заполнять целый промежуток, поскольку в этом случае

$$2 - 3a > 0 \quad \text{и} \quad -2 - 3a < 2 - 3a.$$

Итак, мы показали, что условию задачи удовлетворяют все

$$a \geqslant \frac{2}{3},$$

и только они.

Ответ: при $a \geqslant 2/3$ неравенство имеет не более одного решения; при $a < 2/3$ множество решений бесконечно.

Глава 7

КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН И ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Отдельный и достаточно большой класс задач с параметрами составляют задачи, решение которых основано на использовании различных свойств квадратного трёхчлена. Кроме того, ряд задач с параметрами, которые, на первый взгляд, не связаны с квадратным трёхчленом, могут быть сведены к задачам, в которых нужно будет исследовать расположение корней квадратного трёхчлена в зависимости от значений параметра. Поэтому умение хорошо решать рассматриваемые в этом разделе задачи является очень важным для успешного преодоления вступительных испытаний.

Перейдём к рассмотрению конкретных примеров.

Пример 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1980). При каких значениях параметра a уравнение

$$(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$$

имеет два различных корня?

Прежде всего, заметим, что в зависимости от того, какие именно значения принимает параметр a, заданное уравнение относительно неизвестной x может оказаться либо линейным (при $3a-1=0$), либо квадратным (при $3a-1\neq 0$).

При

$$a=\frac{1}{3}$$

заданное уравнение принимает вид

$$\frac{2}{3}\,x-1=0$$

и имеет лишь один корень.

Следовательно,

$$a = \frac{1}{3}$$

условию задачи не удовлетворяет.

При всех

$$a \neq \frac{1}{3}$$

исходное уравнение будет квадратным. Два различных корня у такого уравнения могут быть только в том случае, когда его дискриминант

$$(2a)^2 - 4(3a-1)(3a-2) = -4(8a^2 - 9a + 2)$$

больше нуля.

Следовательно, для того чтобы узнать значения параметра, при которых наше уравнение будет иметь два различных корня, необходимо решить неравенство

$$8a^2 - 9a + 2 < 0.$$

Выпишем все его решения. Имеем

$$\frac{9-\sqrt{17}}{16} < a < \frac{9+\sqrt{17}}{16}\,.$$

Заметим, однако, что

$$a = \frac{1}{3}$$

попадает в этот интервал, что обязательно надо учесть, записывая окончательный ответ.

Убедимся сначала, что

$$\frac{9-\sqrt{17}}{16} < \frac{1}{3}\,.$$

Запишем интересующие нас величины рядом и поставим между ними знак $\vee$

$$\frac{9-\sqrt{17}}{16} \vee \frac{1}{3}\,,$$

который нужно воспринимать как знак неравенства. Записанный вертикально, он как бы подчёркивает неопределённость наших сведений о том, какая из величин, входящих в выписанную формулу, больше, а какая меньше. И в конце проводимых далее вычислений мы должны выяснить, в какую именно сторону его следует повернуть.

Преобразования, которым подвергнется это выражение, мы будем проводить так, чтобы никак не повлиять на пока неопределённый знак.

Умножим обе части последнего выражения на $16 \cdot 3$

$$27 - 3\sqrt{17} \vee 16,$$

изолируем слагаемое с корнем

$$11 \vee 3\sqrt{17}$$

и, возведя обе части в квадрат, получим, что

$$121 < 153.$$

Так как каждое из этих трёх преобразований сохраняет знак неравенства, которые в предпоследних трёх неравенствах был нам ещё неизвестен, можно сделать следующий важный для нас вывод — знак $\vee$ в исходном выражении должен быть заменен на знак $<$. Тем самым,

$$\frac{9-\sqrt{17}}{16} < \frac{1}{3}\,.$$

Рассуждая подобным образом, в справедливости неравенства

$$\frac{1}{3} < \frac{9+\sqrt{17}}{16}$$

вы можете убедиться сами.

Ответ: искомые значения параметра a — объединение двух интервалов

$$\frac{9-\sqrt{17}}{16} < a < \frac{1}{3}$$

и

$$\frac{1}{3} < a < \frac{9+\sqrt{17}}{16}\,.$$

Пример 2 (филологический факультет МГУ, отделение структурной и прикладной лингвистики, 1977). Для каждого значения параметра a определите число решений уравнения

$$\sqrt{2|x| - x^2} = a.$$

Эта задача легко сводится к задаче о числе корней квадратного трёхчлена.

Сразу зафиксируем следующий важный факт: при всех $a < 0$ заданное уравнение не будет иметь решений вообще.

Если же $a \geqslant 0$, то обе части уравнения можно возвести в квадрат и в результате перейти к уравнению, равносильному исходному

$$x^2 - 2|x| + a^2 = 0.$$

Поскольку

$$x^2 = |x|^2,$$

это уравнение можно переписать в виде

$$|x|^2 - 2|x| + a^2 = 0.$$

Произведя естественную замену

$$y = |x|,$$

приходим к уравнению

$$y^2 - 2y + a^2 = 0.$$

Это уравнение является квадратным при всех значениях параметра a. Вычислим его дискриминант. Имеем

$$4 - 4a^2.$$

Вспоминая, что число решений квадратного уравнения напрямую зависит от знака дискриминанта, рассмотрим три случая (напомним, что мы рассматриваем только неотрицательные значения параметра).

Случай 1. При $a > 1$ дискриминант отрицателен. Значит, уравнение относительно новой переменной y решений не имеет. Следовательно, не имеет решений и исходное уравнение.

Случай 2. При $a = 1$ уравнение относительно y имеет единственный корень, равный 1. Тем самым, при этом значении параметра исходное уравнение равносильно уравнению

$$|x| = 1,$$

которое имеет два различных корня

$$x_1 = 1 \quad \text{и} \quad x_2 = -1.$$

Случай 3. При $0 \leqslant a < 1$ дискриминант положителен, и поэтому уравнение имеет два различных действительных корня

$$y_1 = 1 + \sqrt{1 - a^2} \quad \text{и} \quad y_2 = 1 - \sqrt{1 - a^2}.$$

Следовательно, при $0 \leqslant a < 1$ исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$|x| = 1 + \sqrt{1 - a^2} \quad \text{и} \quad |x| = 1 - \sqrt{1 - a^2}.$$

Заметим, что при всех $0 \leqslant a < 1$ числа, стоящие в правой части обоих уравнений, неотрицательны. Поэтому первое из этих уравнений имеет корни

$$x_1 = 1 + \sqrt{1 - a^2} \quad \text{и} \quad x_2 = -(1 + \sqrt{1 - a^2}),$$

а второе — корни

$$x_3 = 1 - \sqrt{1 - a^2} \quad \text{и} \quad x_4 = -(1 - \sqrt{1 - a^2}),$$

причём каждый из этих корней является решением исходного уравнения.

Теперь для каждого $0 \leqslant a < 1$ необходимо выяснить, нет ли среди этих четырёх решений совпадающих между собой. Сделать это нетрудно — при любом $0 < a < 1$ все четыре решения различны, а при $a = 0$ два из них, а именно x_3 и x_4, совпадают ($x_3 = x_4 = 0$), и уравнение будет иметь только три различных решения.

Остаётся, внимательно просмотрев все решения, правильно записать ответ.

Ответ: при $a < 0$ и $a > 1$ уравнение решений не имеет,
при $a = 0$ уравнение имеет три различных решения,
при $0 < a < 1$ уравнение имеет четыре различных решения,
при $a = 1$ уравнение имеет два различных решения.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$(a-2)x^2+2x-3<0$$

справедливо для всех действительных значений неизвестной x.

Вследствие того, что при $a=2$ заданное неравенство перестаёт быть квадратным, этот случай разумно рассмотреть отдельно.

Итак, при $a=2$ имеем

$$2x-3<0.$$

Это неравенство не выполняется, например, при $x=2$. Поэтому $a=2$ условию задачи не удовлетворяет.

При всех $a\neq 2$ в левой части заданного неравенства стоит квадратный трёхчлен.

Для того чтобы квадратный трёхчлен был отрицателен при всех значениях переменной x, необходимо одновременное выполнение двух условий:

1. коэффициент при x^2 должен быть отрицательным,

   $$a-2<0$$

   (ветви соответствующей ему параболы направлены вниз), и
2. дискриминант этого квадратного трёхчлена должен быть отрицательным,

   $$4+12(a-2)=12a-20<0$$

   (парабола, определяемая этим квадратным трёхчленом, не должна пересекать ось абсцисс).

В результате получаем систему условий

$$\begin{cases} a<\dfrac{5}{3}, \\ a<2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при всех

$$a<\frac{5}{3}$$

условие, поставленное в задаче, будет выполнено.

Ответ: неравенство справедливо для всех действительных значений x при любом $a < 5/3$; для каждого $a \geqslant 5/3$ найдется такое значение переменной x, для которого будет выполняться неравенство

$$(a-2)x^2 + 2x - 3 \geqslant 0.$$

Пример 4 (экономический факультет МГУ, отделение экономики, 1998). Найдите все действительные значения параметра c, для которых все числа из области значений функции

$$f(x) = \frac{x^2 + cx - 1}{2x^2 - 3x + 2}$$

принадлежат интервалу $(-1; 2)$.

Попробуем сначала сформулировать условие задачи в более привычной для нас форме:

> высказанным в задаче требованиям будет удовлетворять каждое значение параметра c, при котором двойное неравенство
>
> $$-1 < f(x) < 2$$
>
> оказывается справедливым для всех значений переменной x из области определения функции $f(x)$.

Областью определения этой функции является множество всех действительных чисел, так как дискриминант квадратного трёхчлена

$$2x^2 - 3x + 2,$$

стоящего в знаменателе, отрицателен, и, значит,

$$2x^2 - 3x + 2 > 0$$

для любого x.

Поэтому, умножив обе части двойного неравенства на этот квадратный трёхчлен, мы перейдём к неравенству, ему равносильному

$$-2x^2 + 3x - 2 < x^2 + cx - 1 < 4x^2 - 6x + 4.$$

Это неравенство, в свою очередь, равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + cx - 1 > \; -2x^2 + 3x - 2, \\ x^2 + cx - 1 < 4x^2 - 6x + 4. \end{cases}$$

Приведя подобные члены, перейдём к системе

$$\begin{cases} 3x^2 + (c-3)x + 1 > 0, \\ 3x^2 - (c+6)x + 5 > 0. \end{cases}$$

Согласно условию задачи, нам необходимо найти все значения параметра c, при каждом из которых эта система неравенств будет справедлива для любого действительного значения переменой x.

Коэффициенты при x^2 в каждом из квадратных трёхчленов, расположенных в левых частях неравенств системы, положительны. Поэтому рассматриваемые неравенства будут выполняться при всех значениях переменной x тогда и только тогда, когда эти трёхчлены не будут иметь действительных корней, т. е. когда соответствующие дискриминанты будут отрицательны

$$\begin{cases} (c-3)^2 - 12 < 0, \\ (c+6)^2 - 60 < 0. \end{cases}$$

Приведя подобные члены, придём к системе

$$\begin{cases} c^2 - 6c - 3 < 0, \\ c^2 + 12c - 24 < 0. \end{cases}$$

Первое неравенство системы выполняется при

$$3 - 2\sqrt{3} < c < 3 + 2\sqrt{3},$$

а второе при

$$-6 - 2\sqrt{15} < c < -6 + 2\sqrt{15}.$$

Как можно убедиться, все условия последней системы будут выполнены для любого значения параметра c, удовлетворяющего двойному неравенству

$$3 - 2\sqrt{3} < c < 3 + 2\sqrt{3}.$$

Ответ: условию задачи удовлетворяют все значения c, удовлетворяющие двойному неравенству

$$3 - 2\sqrt{3} < c < 3 + 2\sqrt{3};$$

если же это условие нарушено, то для каждого значения параметра c можно указать такое значение переменной x, что соответствующее значение функции $f(x)$ окажется вне интервала $(-1, 2)$.

Решения многих задач с параметром, связанных с корнями квадратного трёхчлена, достаточно легко найти при помощи *теоремы Виета* о корнях квадратного трёхчлена.

Напомним её формулировку.

Если квадратный трёхчлен

$$ax^2 + bx + c$$

имеет корни x_1 и x_2 (возможно совпадающие), то справедливы равенства

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Пример 5 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1992). При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

Это уравнение при всех значениях параметра a является квадратным и потому имеет решения тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен.

Другими словами, уравнение имеет корни при всех значениях a, при которых

$$4a^2 - 4(2a^2 + 4a + 3) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство справедливо при всех значениях параметра a, подчинённых двойному неравенству

$$-3 \leqslant a \leqslant -1.$$

Тем самым, при этих значениях параметра a заданное уравнение имеет корни x_1 и x_2 (не обязательно различные), для которых, согласно теореме Виета, справедливы соотношения

$$x_1 + x_2 = -2a \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = 2a^2 + 4a + 3.$$

Поскольку

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2,$$

нужная нам сумма квадратов корней может быть выражена через параметр a следующим образом

$$x_1^2 + x_2^2 = (-2a)^2 - 2(2a^2 + 4a + 3) = -(8a + 6).$$

Легко видеть, что на промежутке

$$-3 \leqslant a \leqslant -1$$

(именно при этих значениях параметра корни существуют) выражение $-(8a + 6)$ достигает наибольшего значения 18 при $a = -3$. Тем самым, максимальное значение суммы квадратов корней заданного уравнения равно 18.

Ответ: сумма квадратов корней уравнения максимальна при $a = -3$ и равна 18.

Пример 6. Исследуйте знаки корней (если таковые имеются) уравнения

$$3ax^2 - (7a + 1)x + 2a + 1 = 0$$

при каждом значении параметра a.

Случай, когда уравнение не является квадратным, необходимо рассмотреть отдельно.

При $a = 0$ заданное уравнение принимает вид

$$-x + 1 = 0$$

и имеет единственный корень $x = 1$, который положителен.

При $a \neq 0$ уравнение будет иметь решения, если его дискриминант неотрицателен. Легко заметить (убедитесь в этом сами), что дискриминант этого уравнения

$$(7a + 1)^2 - 12a(2a + 1) = 25a^2 + 2a + 1 > 0$$

при любом значении a. Это означает, что при любом $a \neq 0$ исходное уравнение имеет два различных корня.

Согласно теореме Виета, для этих корней справедливы следующие соотношения

$$x_1 + x_2 = \frac{7a + 1}{3a} \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = \frac{2a + 1}{3a}\,.$$

Наши рассмотрения мы начнём со случая, когда один из корней равен нулю. Это возможно, лишь при условии, что

$$2a + 1 = 0.$$

Так как в этом случае сумма корней оказывается равной $5/3$, то это и есть значение второго корня.

Значит, при

$$a = -\frac{1}{2}$$

заданное уравнение имеет два корня — положительный и равный нулю.

Исходное уравнение будет иметь корни разных знаков, если их произведение отрицательно.

Для того чтобы узнать, при каких значениях a это возможно, необходимо решить неравенство

$$\frac{2a+1}{3a} < 0.$$

Оно выполняется при

$$-\frac{1}{2} < a < 0.$$

Не рассмотренными остались значения

$$a > 0 \quad \text{и} \quad a < -\frac{1}{2},$$

при которых произведение корней положительно и, значит, их знаки одинаковы — или оба корня положительны, или оба корня отрицательны.

Если их сумма положительна

$$\frac{7a+1}{3a} > 0,$$

то оба корня будут положительны.

Это неравенство выполнено при

$$a > 0 \quad \text{и} \quad a < -\frac{1}{7},$$

а в силу неравенства

$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{7}$$

и при всех

$$a > 0 \quad \text{и} \quad a < -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, при этих значениях параметра уравнение будет иметь два положительных корня.

При условиях

$$a > 0 \quad \text{и} \quad a < -\frac{1}{2}$$

выражение

$$\frac{7a+1}{3a}$$

отрицательным быть не может. А это означает, что исходное уравнение не может иметь двух отрицательных корней.

Нам остаётся тщательно просмотреть все проведённые исследования и правильно записать ответ.

Ответ: при $a = 0$
уравнение имеет один положительный корень;
при $a = -\dfrac{1}{2}$
один корень уравнения равен нулю, а второй положителен;
при $-\dfrac{1}{2} < a < 0$
уравнение имеет два корня разных знаков;
при $a > 0$ и $a < -\dfrac{1}{2}$
уравнение имеет два положительных корня.

При решении задач, в условиях которых требуется указать значения параметра, при которых корни квадратного трёхчлена

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

тем или иным образом располагаются относительно заданного числа (или нескольких заданных чисел), необходимо анализировать не только дискриминант

$$D = a^2 - 4ac$$

этого трёхчлена, но и положение (относительно заданного числа или заданных чисел) абсциссы

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

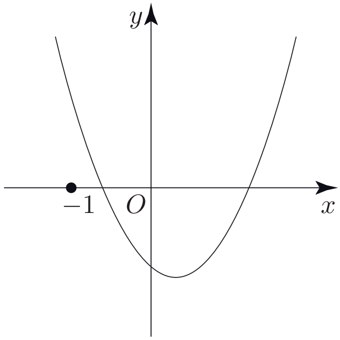


Рис. 7.1

вершины соответствующей параболы

$$y = ax^2 + bx + c,$$

а также значения, которые квадратный трёхчлен принимает в заданных числах.

Пример 7. Определите все значения параметра a, при которых оба корня уравнения

$$2x^2 + ax - 2 = 0$$

больше -1.

Нарисуем на картинке график функции

$$f(x) = 2x^2 + ax - 2$$

так, чтобы было выполнено условие задачи (рис. 7.1).

Из рисунка видно, что условию задачи будут удовлетворять те и только те значения параметра a, при которых:

во-первых, дискриминант этого квадратного трёхчлена неотрицателен (условие наличия одного или двух корней),

во-вторых, вершина параболы находится правее -1 ($x_0 > -1$) и, наконец,

в-третьих, значение трёхчлена при $x = -1$ положительно ($f(-1) > 0$).

Действительно, при одновременном выполнении всех трёх условий наша парабола занимает нужное положение. Если же хотя бы одно из этих условий не выполняется, то положение параболы не будет удовлетворять условию задачи.

Итак, искомые значения параметра a должны удовлетворять следующей системе неравенств

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ x_0 > -1, \\ f(-1) > 0. \end{cases}$$

Проведя несложные вычисления, получим систему

$$\begin{cases} a^2 + 16 > 0, \\ -\dfrac{a}{4} > -1, \\ -a > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что первое неравенство этой системы справедливо при всех значениях параметра a.

Решениями второго неравенства являются все значения $a < 4$.

Третьему неравенству удовлетворяют все значения $a < 0$.

Следовательно, система неравенств справедлива при $a < 0$.

Ответ: условию задачи удовлетворяют все значения параметра $a < 0$.

Замечание. Из рисунка видно, что достаточно найти условия на параметр, при выполнении которых меньший (точнее говоря, не больший) корень заданного уравнения

$$\frac{-a - \sqrt{a^2 + 16}}{4} > -1.$$

Это приводит к неравенству

$$\sqrt{a^2 + 16} < 4 - a,$$

которое равносильно совсем простому неравенству $a < 0$.

Пример 8. Определите все значения параметра, при которых один корень уравнения

$$(a - 2)x^2 - 2ax + a - 6 = 0$$

меньше 1, а другой больше 3.

Старший коэффициент квадратного трёхчлена

$$f(x) = (a-2)x^2 - 2ax + a - 6$$

(коэффициент при x^2) зависит от параметра. Поэтому необходимо рассмотреть два случая (при $a = 2$ уравнение имеет только один корень, и потому этот случай рассматривать не нужно).

Случай А. При $a > 2$ ветви параболы

$$y = (a-2)x^2 - 2ax + a - 6$$

направлены вверх, и если она занимает положение, изображённое на картинке (рис. 7.2), требование задачи будет соблюдено.

Из анализа рисунка можно заключить, что если одновременно будут соблюдаться условия

$$f(1) < 0 \quad \text{и} \quad f(3) < 0,$$

то требование $D > 0$ выполнится автоматически — поскольку ветви параболы направлены вверх, она неизбежно пересечёт ось абсцисс в двух точках, и у нашего уравнения будет два корня.

Итак, искомые значения параметра a можно найти из системы неравенств

$$\begin{cases} a - 2 - 2a + a - 6 < 0, \\ 9(a-2) - 6a + a - 6 < 0. \end{cases}$$

Первое неравенство этой системы справедливо при всех значениях a, а второму неравенству удовлетворяют все $a < 6$.

Учитывая, что $a > 2$, получаем, что условию задачи удовлетворяют все значения параметра a, связанные условиями $2 < a < 6$.

Случай В. При $a < 2$ ветви параболы направлены вниз, и, если она расположена так, как показано на рис. 7.3, условия задачи будут выполнены.

Рассуждая аналогично случаю А, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} f(1) > 0, \\ f(3) > 0. \end{cases}$$

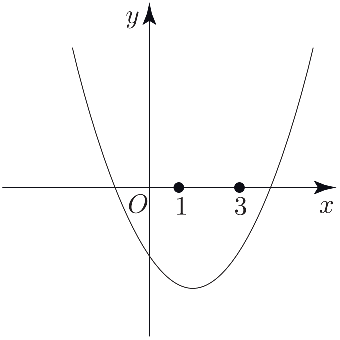


Рис. 7.2

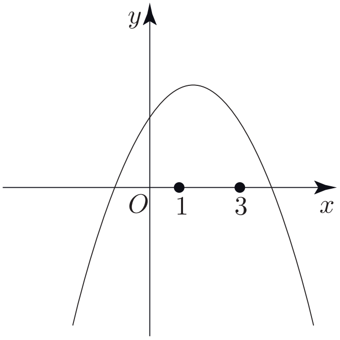


Рис. 7.3

Тем самым, искомые значения параметра a должны подчиняться условиям системы

$$\begin{cases} a-2-2a+a-6>0, \\ 9(a-2)-6a+a-6>0, \end{cases}$$

первое неравенство которой не выполняется ни при каких значениях параметра a. Поэтому эта система решений не имеет.

Ответ: условию задачи удовлетворяют все $2<a<6$.

Пример 9. Определите все значения параметра a, при которых один корень уравнения

$$x^2-(a+1)x+a^2+a-8=0$$

больше 2, а другой меньше 2.

Ветви нашей параболы направлены вверх, поэтому соответствующая картинка выглядит так, как показано на рис. 7.4.

Легко убедиться в том, что график квадратного трёхчлена

$$f(x)=x^2-(a+1)+a^2+a-8$$

займет такое положение тогда и только тогда, когда значение квадратного трёхчлена при $x=2$ будет отрицательно.

Заметим, что если условие $f(2)<0$ будет выполнено, то парабола, ветви которой направлены вверх, неизбежно пересечёт ось абсцисс в двух точках, и поэтому условие на дискриминант

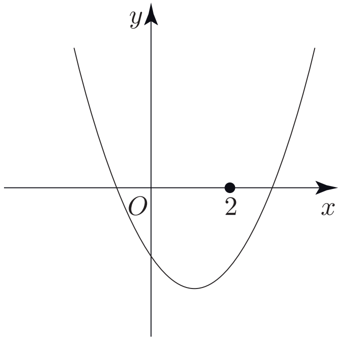


Рис. 7.4

квадратного трёхчлена $D > 0$ будет выполняться автоматически.

Вследствие соотношения

$$f(2) = 4 - 2(a + 1) + a^2 + a - 8 = a^2 - a - 6,$$

условию задачи будут удовлетворять те и только те значения параметра a, которые являются решениями неравенства

$$a^2 - a - 6 < 0.$$

Эти значения легко находятся — неравенство выполняется при $-2 < a < 3$.

Ответ: условию задачи удовлетворяют все значения параметра a, подчинённые условию $-2 < a < 3$, и только они.

Пример 10 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 1995). Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$x - 2 = \sqrt{-2(p + 2)x + 2}$$

имеет единственное решение.

Заметим прежде всего, что заданное уравнение на множестве $x < 2$ решений не имеет.

При всех $x \geqslant 2$ обе части уравнения неотрицательны, и, следовательно, уравнение, полученное после возведения исходного уравнения в квадрат,

$$(x-2)^2 = -2(p+2)x + 2,$$

равносильное исходному.

Приведём подобные,

$$x^2 + 2px + 2 = 0,$$

и попытаемся переформулировать условие задачи в более привычной для нас форме:

условие задачи будет выполнено, если уравнение

$$x^2 + 2px + 2 = 0$$

будет иметь ровно одно решение, большее или равное 2.

Здесь удобно рассмотреть два случая:

случай A — один корень строго больше 2, а другой — строго меньше,

случай B — один из корней равен 2, а другой либо меньше 2, либо тоже равен 2.

Случай A. Поскольку ветви параболы, являющейся графиком квадратного трёхчлена

$$f(x) = x^2 + 2px + 2,$$

направлены вверх, то этот случай можно описать так, как показано на рис. 7.5. И значит, нам нужно найти все те значения параметра p, для которых

$$f(2) < 0.$$

В результате имеем неравенство

$$6 + 4p < 0,$$

которое выполняется при

$$p < -\frac{3}{2}\,.$$

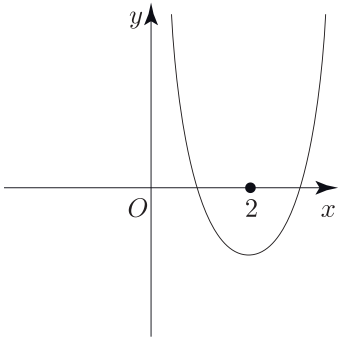


Рис. 7.5

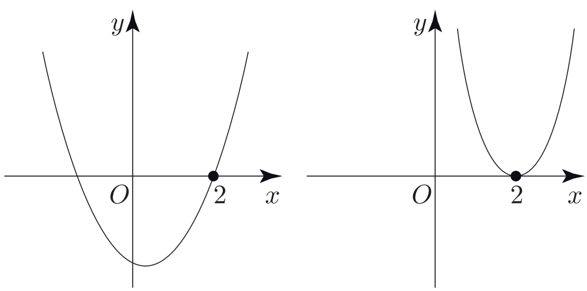


Рис. 7.6

Случай В. Этот случай может быть изображён так, как показано на рис. 7.6 (на правом рисунке показан допустимый вариант, при котором уравнение имеет единственный корень $x = 2$).

Анализ картинок даёт возможность утверждать, что в этом случае условию задачи будут удовлетворять значения параметра p, подчинённые условиям

$$\begin{cases} f(2) = 0, \\ x_0 \leqslant 2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 6 + 4p = 0, \\ -p \leqslant 2. \end{cases}$$

Уравнение имеет единственное решение

$$p = -\frac{3}{2},$$

которое удовлетворяет и неравенству. Поэтому

$$p = -\frac{3}{2}$$

является одним из решений задачи.

Ответ: уравнение имеет единственное решение при всех

$$p \leqslant -\frac{3}{2},$$

и только при них.

Глава 8

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Чтобы успешно решать показательные уравнения и неравенства, необходимо хорошо понимать и уметь применять основные свойства показательной функции.

Напомним их вкратце.

Показательная функция

$$f(x) = a^x$$

имеет смысл лишь при $a > 0$. Добавим к этому естественное условие $a \neq 1$. Показательная функция определена при всех действительных значениях переменной x и принимает только положительные значения.

Иначе говоря, множеством решений неравенства

$$a^x > 0$$

является множество всех действительных чисел.

С другой стороны, неравенство

$$a^x < b,$$

где $b \leqslant 0$, решений не имеет.

При решении показательных уравнений и неравенств обычно находят свое применение следующие равенства

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy},$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x.$$

Важно помнить также, что при $a > 1$ функция a^x монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ монотонно убывает. Это свойство показательной функции часто используется при решении показательных неравенств.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решение значительного числа показательных уравнений основано на том факте, что уравнение

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

равносильно уравнению

$$f(x) = g(x).$$

Простейшее показательное уравнение

$$a^x = b$$

при $b \leqslant 0$ решений не имеет. Если же $b > 0$, то при $a \neq 1$ решением этого уравнения является число

$$x = \log_a b.$$

Наконец, уравнение

$$1^x = b$$

не имеет решений при $b \neq 1$, а при $b = 1$ любое число является его решением.

Поэтому уравнению

$$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$$

удовлетворяют не только те значения переменной x, при которых

$$\begin{cases} g(x) = h(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

но и те, при которых

$$f(x) = 1,$$

а функции $g(x)$ и $h(x)$ имеют смысл.

Наши рассмотрения мы начнём с описания некоторых приёмов решения показательных уравнений.

Пример 1. Решите уравнение
$$2^{4x} = \frac{1}{32}\,.$$

Представим число, стоящее в правой части, в виде степени числа 2,
$$\frac{1}{32} = 2^{-5}.$$
Это позволит записать заданное уравнение в следующем виде
$$2^{4x} = 2^{-5},$$
или, что равносильно,
$$4x = -5.$$
Отсюда
$$x = -\frac{5}{4}\,.$$

Ответ:
$$x = -\frac{5}{4}\,.$$

Пример 2. Решите уравнение
$$4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}.$$

Для решения таких уравнений достаточно привести сомножители правой и левой частей к одинаковому основанию степени. В заданном уравнении в качестве такого основания удобно выбрать число 2.

Поскольку
$$4^{\sqrt{x+1}} = 2^{2\sqrt{x+1}}$$
и
$$64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}} = 2^6 \cdot 2^{\sqrt{x+1}} = 2^{6+\sqrt{x+1}},$$
исходное уравнение можно переписать в виде
$$2^{2\sqrt{x+1}} = 2^{6+\sqrt{x+1}}.$$

Это уравнение равносильно уравнению
$$2\sqrt{x+1} = 6 + \sqrt{x+1},$$
найти решения которого особого труда не представляет.

Имеем

$$\sqrt{x+1} = 6.$$

После возведения в квадрат получаем

$$x + 1 = 36,$$

откуда

$$x = 35.$$

Ответ: $x = 35$.

Пример 3. Решите уравнение

$$2^{x^2} = 5^{3x}.$$

Для того чтобы привести обе части уравнения к одинаковому основанию степени, можно воспользоваться *основным логарифмическим тождеством*

$$a^{\log_a b} = b.$$

Применив его, получим

$$5^{3x} = 2^{\log_2 5^{3x}}.$$

Это даёт возможность записать заданное уравнение в следующем виде

$$2^{x^2} = 2^{\log_2 5^{3x}},$$

или, что равносильно,

$$x^2 = \log_2 5^{3x}.$$

Заметим, что к этому же соотношению можно было перейти, прологарифмировав исходное уравнение по основанию 2.

Воспользовавшись далее одним из свойств логарифмов —

$$\log_a b^x = x \log_a b,$$

получим квадратное уравнение

$$x^2 = 3x \log_2 5,$$

решения которого легко находятся

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3\log_2 5.$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 3\log_2 5$.

Рассмотрим теперь три уравнения, предлагавшихся на вступительных экзаменах.

Пример 4 (физический факультет МГУ, 1995). Решите уравнение
$$2^{x-1} \cdot 3^x = 0{,}5 \cdot 6^{2-x}.$$

Замечая, что
$$2^{x-1} = \frac{2^x}{2^1} = 0{,}5 \cdot 2^x$$
и
$$2^x \cdot 3^x = 6^x,$$
перепишем заданное уравнение так
$$0{,}5 \cdot 6^x = 0{,}5 \cdot 6^{2-x}.$$
Умножив обе части этого уравнения на 2, получим
$$6^x = 6^{2-x},$$
или, что то же,
$$x = 2 - x,$$
откуда $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Решения двух следующих уравнений можно найти при помощи стандартных приёмов, которые полезно хорошо запомнить.

Пример 5 (химический факультет МГУ, 1998). Решите уравнение
$$9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

Соотношение
$$9^x = 3^{2x} = (3^x)^2$$
позволяет переписать заданное уравнение в виде
$$(3^x)^2 + 2 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

Делая теперь замену переменной
$$y = 3^x,$$

приходим к квадратному уравнению относительно переменной y

$$y^2 + 2y - 3 = 0.$$

Нас интересуют только положительные решения этого уравнения (в силу того, что $3^x > 0$ при любом значении переменной x).

Поэтому из решений этого уравнения

$$y_1 = 1 \quad \text{и} \quad y_2 = -3$$

оставляем лишь одно

$$3^x = 1.$$

Отсюда

$$x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 6 (химический факультет МГУ, 1964). Решите уравнение

$$4^x = 2 \cdot 14^x + 3 \cdot 49^x.$$

Легко видеть, что это уравнение можно записать и поиному

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x 7^x - 3 \cdot (7^x)^2 = 0.$$

Для того чтобы провести замену переменных, разделим обе части уравнения на выражение $(7^x)^2$, которое ни при каком значении переменной x не обращается в нуль. Получим уравнение, равносильное исходному,

$$\left(\frac{2^x}{7^x}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2^x}{7^x} - 3 = 0.$$

Замена

$$y = \frac{2^x}{7^x}$$

приводит к уравнению

$$y^2 - 2y - 3 = 0,$$

только один из корней

$$y_1 = -1 \quad \text{и} \quad y_2 = 3$$

которого (второй) представляет для нас интерес.

Тем самым, исходное уравнение оказывается равносильным уравнению
$$\frac{2^x}{7^x} = 3,$$
или, что то же, уравнению
$$\left(\frac{2}{7}\right)^x = 3.$$
Отсюда находим единственное решение
$$x = \log_{\frac{2}{7}} 3.$$

Ответ: $x = \log_{\frac{2}{7}} 3$.

Только что разобранное уравнение можно решить и по-другому.

Положив
$$u = 2^x, \quad v = 7^x,$$
получаем однородное уравнение
$$u^2 - 2uv - 3v^2 = 0,$$
решая которое как квадратное уравнение относительно u (считая v числом), приходим к тому, что либо
$$u = -v,$$
что невозможно, поскольку u и v могут принимать только положительные значения, либо
$$u = 3v.$$
Последнее равенство приводит нас к уравнению
$$2^x = 3 \cdot 7^x,$$
откуда мы легко получаем искомый ответ.

Пример 7. Решите уравнение
$$(5 + 2\sqrt{6})^{2x} + (5 - 2\sqrt{6})^{2x} = 10.$$

Успешный поиск решений этого уравнения основан на привлечении числового равенства
$$(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 1,$$

из которого вытекает важное для нас соотношение

$$5 - 2\sqrt{6} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}\,,$$

равно как и возможность записать заданное уравнение в следующем виде

$$(5 + 2\sqrt{6})^{2x} + \frac{1}{(5 + 2\sqrt{6})^{2x}} = 10.$$

Производя замену переменной

$$y = (5 + 2\sqrt{6})^{2x},$$

получим уравнение

$$y + \frac{1}{y} = 10,$$

которое, как легко убедиться (сделайте это сами!), имеет корни

$$y_1 = 5 + 2\sqrt{6}, \quad y_2 = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем совокупность двух уравнений

$$(5 + 2\sqrt{6})^{2x} = 5 + 2\sqrt{6},$$

и

$$(5 + 2\sqrt{6})^{2x} = 5 - 2\sqrt{6}.$$

Первое из этих уравнений имеет корень

$$x = \frac{1}{2}\,,$$

а второе

$$x = -\,\frac{1}{2}\,.$$

Ответ:

$$x_1 = \frac{1}{2}\,, \quad x_2 = -\,\frac{1}{2}\,.$$

Пример 8. Решите уравнение

$$|x - 3|^{\frac{x+1}{4}} = |x - 3|^{\frac{x-2}{3}}.$$

Наши рассмотрения начнём со случая, когда основание степени, одинаковое у левой и правой частей, равно 1,

$$|x-3| = 1.$$

Это уравнение имеет два решения

$$x_1 = 4 \quad \text{и} \quad x_2 = 2.$$

Если же основание степени отлично от 1 и строго положительно (в подобных задачах последнее всегда необходимо требовать, ибо показательная функция имеет смысл только в этом случае), то непременно должны совпадать показатели степени

$$\frac{x+1}{4} = \frac{x-2}{3}.$$

Это уравнение имеет решение $x = 11$.

Убедившись в том, что оно не обращает в нуль основание степени $|x-3|$, записываем ответ.

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 11$.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Переходя к показательным неравенствам, сразу же отметим, что стандартные замены, помогающие решать показательные уравнения, эффективны и при решении показательных неравенств.

Пример 9. Решите неравенство

$$7^{3x+2} > 49.$$

Перепишем сначала это неравенство так

$$7^{3x+2} > 7^2.$$

Так как $7 > 1$, и значит, функция 7^x монотонно возрастает, то его можно заменить на равносильное неравенство

$$3x + 2 > 2.$$

Множество решений этого, а следовательно, и исходного неравенства описывается совсем просто — это все значения переменной x, подчинённые неравенству

$$x > 0.$$

Ответ: $x > 0$.

Пример 10. Решите неравенство

$$(0{,}5)^{2x-1} > 0{,}125.$$

С учётом равенства $0{,}125 = (0{,}5)^3$ заданное неравенство можно переписать в виде

$$(0{,}5)^{2x-1} > (0{,}5)^3.$$

Из того, что $0 < 0{,}5 < 1$, и значит, функция $(0{,}5)^x$ монотонно убывает, вытекает, что последнее неравенство равносильно неравенству

$$2x - 1 < 3,$$

все решения которого подчиняются условию $x < 2$.

Ответ: $x < 2$.

Рассмотрим теперь два неравенства, предлагавшиеся на вступительных экзаменах.

Пример 11 (экономический факультет МГУ, отделение политической экономии, 1980). Решите неравенство

$$3^{4x^2-3x+1/2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}.$$

Замечая, что

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2} = 3^{40x^2},$$

перепишем исходное неравенство в виде

$$3^{4x^2-3x+1/2} < 3^{40x^2}.$$

У правой и у левой частей неравенства основания степени одинаковы и больше 1. Поэтому неравенство равносильно следующему

$$4x^2 - 3x + \frac{1}{2} < 40x^2.$$

После приведения подобных получаем, что

$$72x^2 + 6x - 1 > 0.$$

Решениями этого неравенства заполняют два луча на числовой оси

$$x < -\frac{1}{6}, \quad x > \frac{1}{12}.$$

Ответ:

$$x < -\frac{1}{6}, \quad x > \frac{1}{12}.$$

Пример 12 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1996). Решите неравенство

$$3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^{x+1} - 5 \leqslant 0.$$

Переписав это неравенство в виде

$$3 \cdot (2^x)^2 - 14 \cdot 2^x - 5 \leqslant 0$$

и проведя стандартную замену

$$y = 2^x,$$

придём к неравенству

$$3y^2 - 14y - 5 \leqslant 0,$$

решениями которого являются все значения переменной y, подчинённые условию

$$-\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 5.$$

Тем самым, исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$-\frac{1}{3} \leqslant 2^x \leqslant 5,$$

первое из которых

$$-\frac{1}{3} \leqslant 2^x$$

всегда выполнимо, а решениями второго

$$2^x \leqslant 5$$

являются все

$$x \leqslant \log_2 5.$$

Ответ: $x \leqslant \log_2 5$.

Пример 13. Решите неравенство

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > 1.$$

Перепишем заданное неравенство в следующем виде

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > (4x^2 + 2x + 1)^0.$$

Сразу заметим, что поскольку дискриминант квадратного трёхчлена

$$4x^2 + 2x + 1$$

отрицателен, неравенство

$$4x^2 + 2x + 1 > 0$$

выполнено при любых значениях переменной x.

Отсюда легко прийти к заключению, что заданное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 > 1, \\ x^2 - x > 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 < 1, \\ x^2 - x < 0. \end{cases}$$

Найдём решения первой системы. Неравенство

$$4x^2 + 2x + 1 > 1$$

после несложных преобразований сводится к виду

$$2x^2 + x > 0,$$

все решения которого описываются так:

$$x > 0 \quad \text{и} \quad x < -1/2.$$

Решения второго неравенства

$$x^2 - x > 0$$

также несложно получить — это все

$$x > 1 \quad \text{и} \quad x < 0.$$

Отбирая все те значения переменной x, которые попали в оба эти множества, получаем решения первой системы

$$x > 1 \quad \text{и} \quad x < -1/2.$$

Вторая система решений не имеет, поскольку множество решений её первого неравенства

$$-1/2 < x < 0$$

не имеет ни одного общего значения с множеством решений второго неравенства

$$0 < x < 1.$$

Ответ: $x > 1$, $x < -1/2$.

Последняя задача этого раздела — это система уравнений.

Пример 14 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 1996). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3^y = 2, \\ x^3 + 27^y = 26. \end{cases}$$

Замечая, что

$$27^y = (3^y)^3,$$

и проведя замену

$$u = 3^y,$$

придём к системе

$$\begin{cases} x + u = 2, \\ x^3 + u^3 = 26. \end{cases}$$

Пользуясь тем, что

$$x^3 + u^3 = (x + u)(x^2 - xu + u^2) = (x + u)((x + u)^2 - 3xu),$$

и привлекая первое уравнение системы $x + u = 2$, получаем уравнение

$$2(4 - 3xu) = 26,$$

равносильное второму уравнению системы.

Это позволяет привести предыдущую систему относительно переменных x и u к равносильной ей системе

$$\begin{cases} x + u = 2, \\ xu = -3, \end{cases}$$

которая выглядит заметно проще и имеет два решения

$$x = 3, \quad u = -1$$

и

$$x = -1, \quad u = 3.$$

Однако ввиду того, что

$$u = 3^y$$

может принимать лишь положительные значения, заключаем, что исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} x = -1, \\ 3^y = 3, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение

$$x = -1, \quad y = 1.$$

Ответ: $x = -1$, $y = 1$.

Глава 9

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Этот раздел естественно начать с определения логарифма.

Логарифмом числа b $(b > 0)$ по основанию a $(0 < a \neq 1)$ называется такое число c, что

$$a^c = b.$$

По-иному это записывается так

$$c = \log_a b.$$

Из определения следует, в частности, что для любого числа a, подчинённого условию $0 < a \neq 1$, выполняются равенства

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{и} \quad \log_a a = 1.$$

Для любых чисел a и b, удовлетворяющих условиям

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0,$$

выполняется *основное логарифмическое тождество*

$$a^{\log_a b} = b.$$

Выписывая далее наиболее употребительные формулы преобразования логарифмов, мы подразумеваем, что всюду в них основания логарифмов положительны и отличны от единицы.

Приводимые ниже формулы необходимо хорошо запомнить и научиться их применять, поскольку от этого напрямую зависит ваш успех при решении и логарифмических уравнений и логарифмических неравенств.

Итак,

$$\log_a b + \log_a c = \log_a (bc), \qquad b > 0, \quad c > 0;$$

$$\log_a (bc) = \log_a |b| + \log_a |c|, \qquad bc > 0;$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}, \qquad b > 0, \quad c > 0;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|, \qquad bc > 0;$$
$$\log_a b^x = x \log_a b, \qquad b > 0;$$
$$\log_{a^x} b = \frac{1}{x} \log_a b, \qquad b > 0, \quad x \neq 0;$$
$$\log_a b^{2n} = 2n \log_a |b|, \qquad b \neq 0, \quad n = 1{,}2, \ldots;$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad c > 0, \quad c \neq 1.$$

Отметим важный частный случай последней формулы (получающийся при $b = c$)

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

На формулы преобразования логарифмов произведения (частного) в сумму (разность) логарифмов стоит обратить особое внимание. Так, преобразование

$$\log_a[f(x)g(x)] = \log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|$$

будет правильным, а преобразование

$$\log_a[f(x)g(x)] = \log_a f(x) + \log_a g(x)$$

нет, и, применяя его в процессе решения, мы можем потерять корни, при которых $f(x)$ и $g(x)$ принимают отрицательные значения одновременно.

Кроме того, чтобы правильно решать логарифмические неравенства, никак нельзя упускать из виду, что при $a > 1$ функция

$$y = \log_a x$$

монотонно возрастает, а при $a < 1$ монотонно убывает.

Начнём с простейшего логарифмического уравнения.

Пример 1. Решите уравнение

$$\log_2 (x + 3) = 3.$$

Согласно определению логарифма,

$$x + 3 = 2^3,$$

поэтому
$$x = 8 - 3 = 5.$$

Ответ: $x = 5$.

Отметим, что в случаях, подобных только что рассмотренному, поиск области допустимых значений (ОДЗ) обязательным не является. Однако решение подавляющего большинства логарифмических уравнений и неравенств следует начинать именно с поиска ОДЗ.

Вместе с тем, ясно, что для уравнений всегда можно произвести проверку всех полученных значений неизвестной, и поэтому, если отыскать ОДЗ технически достаточно сложно, то можно делать исключения и ОДЗ не искать.

Пример 2. Решите уравнение
$$\log_x (x^3 - x^2 + 4) = 3.$$

Здесь поиск ОДЗ связан с необходимостью разрешения кубического неравенства
$$x^3 - x^2 + 4 > 0.$$
Однако в силу того, что в правой части заданного уравнения стоит именно 3, в рассматриваемом случае без этого можно обойтись.

В самом деле, если данное уравнение имеет решения, то они одновременно являются и решениями уравнения
$$x^3 - x^2 + 4 = x^3,$$
корни которого находятся совсем просто. Это
$$x_1 = 2 \quad \text{и} \quad x_2 = -2.$$

Проведя проверку, убеждаемся, что лишь $x = 2$ является решением исходного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

Пример 3. Решите уравнение
$$\log_x (x + 6) = 2.$$

Отыскание ОДЗ этого уравнения сводится к решению следующей системы

$$\begin{cases} x > 0, \\ x + 6 > 0, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

что приводит к условию

$$0 < x \neq 1.$$

При этом условии заданное уравнение равносильно уравнению

$$x + 6 = x^2,$$

которое имеет два решения

$$x_1 = -2 \quad \text{и} \quad x_2 = 3.$$

Но лишь $x = 3$ удовлетворяет требованиям ОДЗ.

Ответ: $x = 3$.

Пример 4. Решите уравнение

$$\log_4 x^2 = \log_2 (x + 1).$$

Как легко убедиться, ОДЗ данного уравнения описывается требованием

$$-1 < x \neq 0,$$

при выполнении которого исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_2 |x| = \log_2 (x + 1),$$

поскольку

$$\log_4 x^2 = \frac{1}{2} \log_2 x^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \log_2 |x| = \log_2 |x|.$$

Отсюда получаем уравнение

$$|x| = x + 1,$$

которое имеет единственный корень

$$x = -\frac{1}{2},$$

попадающий в ОДЗ.

Ответ: $x = -1/2$.

Отметим, что если бы мы *поспешили* и перешли от исходного уравнения к уравнению

$$\log_2 x = \log_2 (x+1),$$

то единственное решение исходного уравнения было бы *потеряно.*

Ещё раз подчеркнём: преобразования при решении логарифмических уравнений и неравенств необходимо производить с максимальной осторожностью и аккуратностью!

Рассмотрим теперь несколько уравнений, предлагавшихся на вступительных экзаменах.

Пример 5 (биологический факультет МГУ, 1997). Решите уравнение

$$\log_2 (x+2) + \log_2 (x+1) = 2.$$

ОДЗ этого уравнения находится из системы

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+1>0, \end{cases}$$

решениями которой являются все значения неизвестной, подчинённые условию $x > -1$.

Исходное уравнение на ОДЗ равносильно уравнению

$$(x+1)(x+2) = 4,$$

поскольку

$$\log_2(x+2) + \log_2(x+1) = \log_2 \left[(x+2)(x+1)\right].$$

Отсюда получаем, что

$$x^2 + 3x - 2 = 0.$$

Как легко убедиться, из решений этого уравнения только

$$x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

входит в предварительно найденную нами ОДЗ.

Ответ:

$$x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\,.$$

Пример 6 (экономический факультет МГУ, отделение экономики, 1978). Решите уравнение

$$\log_{1-2x^2} x = \frac{1}{4} - \frac{3}{\log_2 (1-2x^2)^4}\,.$$

ОДЗ рассматриваемого уравнения задаётся системой неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ 1 - 2x^2 > 0, \\ 1 - 2x^2 \neq 1. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются все значения переменной x, связанные двойным неравенством

$$0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

После умножения обеих частей на 4 заданное уравнение примет вид

$$4\log_{1-2x^2} x = 1 - 3\log_{1-2x^2} 2,$$

поскольку в ОДЗ

$$\frac{3}{\log_2 (1-2x^2)^4} = \frac{3}{4\log_2 (1-2x^2)} = \frac{3}{4}\log_{1-2x^2} 2.$$

Воспользовавшись теперь равенствами

$$3\log_{1-2x^2} 2 = \log_{1-2x^2} 8 \quad \text{и} \quad 4\log_{1-2x^2} x = \log_{1-2x^2} x^4,$$

справедливыми для всех значений неизвестной x из ОДЗ, и перенося логарифм из правой части в левую, получим уравнение

$$\log_{1-2x^2} x^4 + \log_{1-2x^2} 8 = 1,$$

которое, в свою очередь, равносильно уравнению

$$\log_{1-2x^2}(8x^4) = 1.$$

Отсюда получаем, что

$$8x^4 = 1 - 2x^2.$$

Это биквадратное уравнение имеет два корня

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{1}{2},$$

из которых лишь

$$x = \frac{1}{2}$$

входит в ОДЗ.

Ответ: $x = 1/2$.

Пример 7 (Черноморский филиал МГУ, 2000). Решите уравнение

$$2\log_2(\log_2 x) = \log_2(7 - 6\log_2 x).$$

При поиске решений этого уравнения замена

$$y = \log_2 x$$

напрашивается сама собой.

Получаем уравнение

$$2\log_2 y = \log_2(7 - 6y),$$

ОДЗ которого находится из системы

$$\begin{cases} y > 0, \\ 7 - 6y > 0. \end{cases}$$

Ее решениями являются все значения переменной y, удовлетворяющие условию

$$0 < y < \frac{7}{6}.$$

Для этих значений y последнее уравнение равносильно уравнению

$$\log_2 y^2 = \log_2(7 - 6y),$$

откуда

$$y^2 = 7 - 6y.$$

Это уравнение имеет два корня

$$y_1 = 1 \quad \text{и} \quad y_2 = -7,$$

из которых в ОДЗ входит только $y = 1$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем уравнение

$$\log_2 x = 1,$$

которое имеет единственное решение

$$x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Переходя теперь к поиску решений логарифмических неравенств, специально подчеркнём, что здесь, в отличие от уравнений, за основаниями логарифмов нужно следить особо — преобразуя логарифмическое неравенство, всегда полезно знать, по какую сторону от 1 находятся основания, так как это самым непосредственным образом влияет на правильность окончательного результата.

Пример 8. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 1.$$

ОДЗ описывается неравенством

$$x - 1 > 0,$$

которое справедливо при всех значениях $x > 1$.

В этой области функция

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

монотонно убывает, вследствие того, что основание логарифма $1/2 < 1$.

Следовательно, исходное неравенство, которое можно переписать в виде

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2},$$

в ОДЗ равносильно неравенству

$$x - 1 < \frac{1}{2},$$

все решения которого можно описать неравенством

$$x < \frac{3}{2}.$$

Учитывая ОДЗ, получаем, что заданное неравенство выполняется при всех
$$1 < x < \frac{3}{2}\,.$$

Ответ:
$$1 < x < \frac{3}{2}\,.$$

Пример 9 (факультет психологии МГУ, 1996). Решите неравенство
$$2 < \log_3 (x-3)^4 \leqslant 8.$$

ОДЗ данного неравенства образует множество всех действительных чисел, отличных от 3.

Далее, поскольку
$$\log_3 (x-4)^4 = 4\log_3 |x-3|,$$
рассматриваемое неравенство можно переписать в следующем виде
$$\frac{1}{2} < \log_3 |x-3| \leqslant 2.$$

Так как основание логарифма больше единицы, то это двойное неравенство равносильно системе неравенств
$$\begin{cases} |x-3| \leqslant 9, \\ |x-3| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Первое неравенство системы равносильно двойному неравенству
$$-9 \leqslant x-3 \leqslant 9,$$
все решения которого легко описываются —
$$-6 \leqslant x \leqslant 12.$$

Второе неравенство системы равносильно совокупности неравенств
$$\left[\begin{array}{l} x-3 > \sqrt{3}, \\ x-3 < -\sqrt{3}, \end{array}\right.$$
или, что то же,
$$\left[\begin{array}{l} x > 3+\sqrt{3}, \\ x < 3-\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Нетрудно видеть (проверьте это сами!), что решениями системы, а следовательно, и исходного неравенства, являются все значения неизвестной x, удовлетворяющие совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{r} -6 \leqslant x < 3-\sqrt{3}, \\ 3+\sqrt{3} < x \leqslant 12. \end{array}\right.$$

Ответ: $-6 \leqslant x < 3-\sqrt{3}$; $3+\sqrt{3} < x \leqslant 12$.

Пример 10 (факультет государственного управления МГУ, отделение антикризисного управления, 2001). Решите неравенство

$$\log_4(4^x-1)\cdot\log_{16}(16^{x+1}-8\cdot 4^{x+1}+16) > 12.$$

Преобразуя выражение, стоящее под знаком логарифма по основанию 16,

$$16^{x+1}-8\cdot 4^{x+1}+16 = 16\cdot 4^{2x}-8\cdot 4\cdot 4^x+16 = 16(4^x-1)^2,$$

а затем и сам логарифм,

$$\log_{16}(16(4^x-1)^2) = 1+\log_{16}|4x-1|^2 = 1+\log_4|4^x-1|,$$

получаем возможность переписать заданное неравенство в следующем виде

$$\log_4(4^x-1)(1+\log|4^x-1|) > 12.$$

А так как

$$4^x-1>0,$$

или, что то же,

$$x>0,$$

то и ещё проще

$$\log_4(4^x-1)(1+\log_4(4^x-1)) > 12.$$

Проведём теперь замену переменной

$$y=\log_4(4^x-1).$$

Тогда последнее неравенство примет вид

$$y(1+y)>12.$$

Его решениями, как легко убедиться (сделайте это сами!), являются все значения переменной y, подчинённые условию

$y < -4$, и все значения переменной y, подчинённые условию $y > 3$.

Возвращаясь к исходной переменной, заключаем, что исходное неравенство в ОДЗ равносильно следующей совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \log_4(4^x - 1) < -4, \\ \log_4(4^x - 1) > 3. \end{array}\right.$$

В силу того, что $4 > 1$, первое неравенство оказывается равносильным двойному неравенству

$$0 < 4^x - 1 < \frac{1}{256}\,,$$

или

$$4^x < \frac{257}{256}\,.$$

Поэтому его решениями являются все значения неизвестной x, подчинённые требованию

$$0 < x < \log_4 \frac{257}{256},$$

или, что то же,

$$0 < x < \log_4 257 - 4.$$

Все решения второго неравенства

$$x > \log_4 65$$

входят в ОДЗ.

Объединение полученных решений завершает наши рассмотрения.

Ответ: $0 < x < \log_4 257 - 4$; $x > \log_4 65$.

Пример 11 (экономический факультет МГУ, отделение экономики, 2000). Решите неравенство

$$\frac{\log_7 12}{\log_7 (x^2 - 9)} \geqslant \frac{\log_5 (x^2 + 8x + 12)}{\log_5 (x^2 - 9)}.$$

Как обычно, вначале найдём ОДЗ. Она определяется следующей системой неравенств

$$\left\{\begin{array}{r} x^2 + 8x + 12 > 0, \\ x^2 - 9 > 0, \\ x^2 - 9 \neq 1. \end{array}\right.$$

Множество решений первого неравенства — объединение лучей
$$x > 3 \quad \text{и} \quad x < -6,$$
а множество решений второго — лучей
$$x > 3 \quad \text{и} \quad x < -3.$$
Третье условие системы равносильно ограничению
$$x \neq \pm\sqrt{10}.$$

Следовательно, ОДЗ исходного неравенства представляет собой объединение трёх областей
$$x < -6, \quad 3 < x < \sqrt{10}, \quad x > \sqrt{10}.$$

Приведём обе части исходного неравенства к одному основанию. Имеем
$$\frac{\log_7 12}{\log_7 (x^2-9)} = \log_{x^2-9} 12$$
и
$$\frac{\log_5 (x^2+8x+12)}{\log_5 (x^2-9)} = \log_{x^2-9} (x^2+8x+12).$$
Это позволяет записать заданное неравенство в равносильном виде
$$\log_{x^2-9} 12 \geqslant \log_{x^2-9} (x^2+8x+12).$$

Замечание. Прежде чем избавляться от логарифмов, следует обратить внимание на то, что их основание x^2-9 в зависимости от значения переменной x может быть как больше, так и меньше единицы. При решении этого и других, подобных ему, неравенств сведения о взаимоотношениях между основанием и единицей очень существенны, так как влияют на то, каким именно знаком неравенства нужно будет связать выражения, стоящие под знаками логарифма.

Заметим, что неравенство
$$0 < x^2 - 9 < 1$$
выполнено при всех значениях неизвестной, подчинённых двойному неравенству
$$3 < x < \sqrt{10},$$

а при остальных значениях x из ОДЗ выполняется неравенство
$$x^2 - 9 > 1.$$

Поэтому на интервале
$$3 < x < \sqrt{10},$$
где основание
$$0 < x^2 - 9 < 1,$$
после потенцирования получим, что
$$12 \leqslant x^2 + 8x + 12.$$

Это неравенство выполняется при $x \geqslant 0$ и при $x \leqslant -8$. Множество тех значений переменной x
$$3 < x < \sqrt{10},$$
на котором мы сейчас ищем решение, целиком подчиняется этим условиям, и значит, первую часть решений исходного неравенства можно записать так
$$3 < x < \sqrt{10}.$$

Так как при $x < -6$ и при $x > \sqrt{10}$, как уже отмечалось,
$$x^2 - 9 > 1,$$
то рассматриваемое неравенство с логарифмами равносильно неравенству
$$12 \geqslant x^2 + 8x + 12,$$
которое справедливо при всех
$$-8 \leqslant x \leqslant 0.$$

Учитывая условия на неизвестную x, при которых мы проводим наши рассмотрения, заключаем, что вторая часть решений исходного неравенства совпадает с промежутком
$$-8 \leqslant x < -6.$$

Окончательный ответ — это объединение двух полученных промежутков.

Ответ: $3 < x < \sqrt{10}$; $-8 \leqslant x < -6$.

Пример 12 (факультет психологии МГУ, 1995). Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-16}}{1-\log_{\sqrt{3}}(x-3)} \leqslant 0.$$

Случай 1. Заданное неравенство будет выполнено для тех значений x, при которых числитель равен нулю, а знаменатель имеет смысл и не обращается в нуль.

Числитель равен нулю при $x = \pm 4$. При $x = -4$ выражение под знаком логарифма в знаменателе отрицательно, что недопустимо, в то время как при $x = 4$ знаменатель равен

$$1 - \log_{\sqrt{3}} 1 = 1.$$

Поэтому $|x| = 4$ является решением заданного неравенства.

Случай 2. При $|x| \neq 4$ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 16 > 0, \\ 1 - \log_{\sqrt{3}}(x-3) < 0, \end{cases}$$

первое неравенство которой справедливо при $x > 4$ и при $x < -4$, а второе неравенство равносильно неравенству

$$\log_{\sqrt{3}}(x-3) > 1.$$

Поскольку $\sqrt{3} > 1$, решениями последнего неравенства будут все значения x, удовлетворяющие условию

$$x - 3 > \sqrt{3},$$

или, что то же,

$$x > 3 + \sqrt{3}.$$

Поэтому в случае 2 все решения системы, а следовательно, и исходного неравенства описываются формулой

$$x > 3 + \sqrt{3}.$$

Записывая окончательный ответ, не забудем про ранее найденное значение $x = 4$.

Ответ: $x = 4$; $x > 3 + \sqrt{3}$.

В заключение этого раздела рассмотрим систему уравнений.

Пример 13 (физический факультет МГУ, 1996). Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \log_2(3y^2 - x^2) = 3, \\ 8\log_{16}(-x) + log_2(y^2) = 4. \end{cases}$$

Здесь ОДЗ задаётся следующей системой неравенств
$$\begin{cases} x < 0, \\ 3y^2 > x^2, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение исходной системы равносильно уравнению
$$3y^2 - x^2 = 8,$$
а второе — уравнению
$$2\log_2(-x) + 2\log_2|y| = 4,$$
поскольку
$$8\log_{16}(-x) = 8\log_{2^4}(-x) = 8\,\frac{\log_2(-x)}{\log_2 2^4} = 2\log_2(-x)$$
и
$$\log_2(y^2) = 2\log_2|y|.$$
Запишем полученное уравнение в равносильной форме
$$\log_2(-x|y|) = 2,$$
а затем преобразуем к более простому виду
$$-x|y| = 4.$$

Вспомнив, что ОДЗ включает требование $y \neq 0$, выразим неизвестную x через неизвестную y. Имеем
$$x = -\frac{4}{|y|}\,.$$
Используя это выражение в уравнении
$$3y^2 - x^2 = 8$$
вместо переменной x, получим уравнение
$$3y^2 - \frac{16}{y^2} = 8,$$

которое равносильно биквадратному уравнению

$$3y^4 - 8y^2 - 16 = 0.$$

Последнее имеет корни

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -2.$$

Следовательно,

$$x_1 = x_2 = -2.$$

Легко убедиться, что обе пары

$$x_1 = -2, \quad y_1 = 2$$

и

$$x_2 = -2, \quad y_2 = -2$$

входят в ОДЗ заданной системы.

Ответ: $x_1 = -2$, $y_1 = 2$; $x_2 = -2$, $y_2 = -2$.

Глава 10

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Среди задач вступительных экзаменов по математике *задачи на составление уравнений*, или, как их часто называют, *текстовые задачи*, занимают особое место. Это связано с тем, что, в отличие от большого количества задач других разделов, здесь требуются определённые временны́е затраты на переход от описательной (вербальной) формулировки к формулировке математической.

И именно тем, кто видит себя в будущем перемещающимся по гуманитарной стезе, полезно научиться, пользуясь текстом, в котором описаны события, процессы или иные обстоятельства, и *работая со словом*, выбирать и систематизировать нужную информацию, для того чтобы суметь отразить существо поставленной проблемы при помощи математических формул.

При решении задач на составление уравнений важно научиться переносить на язык математики всю вербальную информацию, которая необходима для ответа на вопрос, поставленный в задаче. Это разбивает само решение текстовой задачи на три условных этапа:

1-й — математическое описание условий задачи (здесь нет мелочей — нередко из условия видно, что переменные, вводимые для такого описания, непременно должны быть положительными, целыми или не превышать известных чисел; часто очень полезным оказывается использование наглядного языка рисунка и т. д.),

2-й — поиск ответа на вопрос задачи (составив на 1-м этапе уравнение или систему соотношений, описывающих условия задачи, нужно, глядя на них, чётко ответить на вопрос — что именно в этом уравнении или в этой системе приведёт к искомому ответу), 3-й — запись ответа (это важная часть поиска решения задачи, так как является итогом ваших изысканий).

Текстовые задачи довольно разнообразны. В одних используются сведения из физики или химии, в других — из экономики или управления, в третьих — из лингвистики или социологии. Чтобы помочь читателю разобраться хотя бы с частью предлагаемых ниже задач, мы сочли целесообразным напомнить некоторые простейшие соотношения, которые пригодятся при их рассмотрении:

(1) расстояние = скорость × время.

(2) работа = производительность × время.

(3) $\text{концентрация вещества} = \dfrac{\text{масса вещества}}{\text{общая масса раствора}} \times 100\%.$

Задача 1 (геологический факультет МГУ, 1996). В одном декалитре кислотного раствора 96% объёма составляет кислота.

Сколько воды нужно добавить для того, чтобы концентрация раствора была не больше 40%?

Решение: Общее количество кислоты в растворе — 0,96 декалитра, и нам нужно рассчитать то минимальное количество воды, которое следует добавить в заданный раствор для того, чтобы в полученном растворе то же количество кислоты составило лишь 40%.

Обозначив через M количество раствора, содержащего 0,96 декалитра кислоты и имеющего сорокапроцентную концентрацию, воспользуемся приведённой выше формулой (3). Положим в ней:

концентрацию равной 40%,

количество вещества равным 0,96 декалитра,

общее количество раствора равным M

и получим, что

$$40\% = \frac{0{,}96}{M} \times 100\%.$$

Отсюда

$$M = 0{,}96 \cdot \frac{100}{40} = 2{,}4 \text{ декалитра}.$$

Вычтем теперь из полученного числа исходное количество раствора

$$2{,}4 - 1{,}0 = 1{,}4.$$

Именно столько декалитров воды нужно добавить в исходный раствор, чтобы получить раствор кислоты с сорокапроцентной концентрацией.

Ответ: не менее 1,4 декалитра.

Задача 2. Вам предложили купить со склада 100 тонн товара по 30 тысяч условных единиц за тонну. Товар в своем составе содержит жидкость, способную с течением времени испаряться. В ходе обсуждения сделки выясняется, что взвешивание проводилось месяц назад. Тогда же было определено процентное содержание жидкости, которое равнялось 99% (по массе). По вашему требованию, на день купли проводится повторный замер содержания жидкости, который показывает, что теперь её уже осталось 96% (по массе).

Как изменилась сумма, которую вы заплатили за товар?

Решение: Вначале рассчитаем процент и массу сухого остатка.

При первом замере жидкости сухой остаток составил 1% и весил 1 тонну. При втором замере — соответственно 4% и снова 1 тонну (масса сухого остатка не меняется). Обозначим интересующую нас массу всего товара (100%) при втором замере через x. Эту величину находим из следующей пропорции

$$\begin{aligned} 4\% - 1 &\quad \text{тонна}, \\ 100\% - x &\quad \text{тонн}. \end{aligned}$$

Отсюда $x = 25$ тонн.

За этот товар следует заплатить

$$25 \text{ тонн} \cdot 30000 \text{ у.е.} = 750000 \text{ у.е.},$$

что в четыре раза меньше требуемой цены.

Ответ: сумма уменьшилась в 4 раза.

Задача 3 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1997). Пункты A, B и C расположены на реке в указанном порядке, считая вниз по течению. Расстояние между пунктами A и B равно 4 км, а между пунктами B и C — 14 км. В 12.00 из пункта B в сторону пункта A отплыла моторная лодка. Достигнув пункта A, она сразу же повернула назад и в 14.00 того же дня прибыла в пункт C.

Найдите скорость лодки в стоячей воде, если известно, что скорость течения равна 5 км/час.

Решение: Обозначим скорость лодки в стоячей воде через x км/час. Тогда перемещение лодки по реке против течения будет происходить со скоростью $x-5$ км/час (скорость движения лодки в стоячей воде минус скорость течения реки), а по течению — со скоростью $x+5$ км/час. Общее время, проведённое лодкой в пути, составляет

$$14 - 12 = 4\,\text{часа},$$

а расстояние, пройденное за это время, —

$$4 + 4 + 14 = 22\,\text{км},$$

причём 4 из них были пройдены против течения, а 18 (расстояние от пункта A до пункта C) — по течению (рис. 10.1).

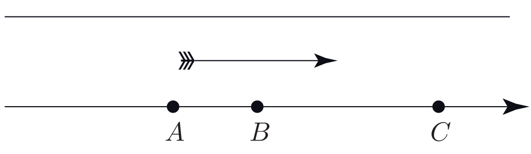


Рис. 10.1

Для того чтобы отыскать скорость лодки в стоячей воде, воспользуемся формулой (1). Эта формула позволит выразить полное время движения лодки через время, затраченное на движение вверх по реке,

$$\frac{4}{x-5},$$

и время, затраченное на движение вниз по реке,

$$\frac{18}{x+5}.$$

Имеем
$$2 = \frac{4}{x-5} + \frac{18}{x+5}\,.$$

Приводя дроби к общему знаменателю, после несложных преобразований получим отсюда, что
$$\frac{2(x^2-25) - 4(x+5) - 18(x-5)}{(x-5)(x+5)} = 0.$$
Знаменатель в левой части этого выражения отличен от нуля вследствие того, что по условию задачи скорость реки в стоячей воде непременно должна быть больше скорости течения реки
$$x > 5,$$
иначе движение лодки против течения невозможно, более того, в этом случае лодку сносило бы вниз по течению (при $x = 5$ лодка также не смогла бы достичь пункта A).

Отбрасывая знаменатель и приводя подобные, получаем квадратное уравнение относительно неизвестной x
$$x^2 - 11x + 10 = 0,$$
которое имеет два корня
$$x_1 = 1 \quad \text{и} \quad x_2 = 10.$$

Первый корень $x_1 = 1$ не подходит по условию задачи, так как не удовлетворяет неравенству $x > 5$. Что касается второго корня $x_2 = 10$, то он подчиняется всем условиям задачи.

Ответ: скорость лодки в стоячей воде равна 10 км/час.

Задача 4 (геологический факультет МГУ, 1998). Первая бригада выполняет некоторую работу на 2 часа быстрее второй бригады и на 7 часов медленнее, чем обе бригады, работающие одновременно.

Выполнят ли бригады эту работу быстрее, чем за 7 часов 57 минут, если они будут работать одновременно?

Решение: Для ответа на вопрос, поставленный условиями задачи, необходимо вычислить время, которое затратят бригады на выполнение работы.

Опираясь на условия задачи и формулу (2), составим для ответа на этот вопрос систему уравнений, рассуждая следующим образом.

Обозначим производительность первой бригады через x, второй бригады — через y, а время, за которое бригады выполнят весь объём работы, если будут работать одновременно, через t. Объем работы (природа которой в данной задаче нам неизвестна) обозначим через V; из хода решения задачи будет видно, что результат, к которому мы придём в итоге наших рассмотрений, от конкретного значения величины V зависеть не будет, и её можно положить равной единице.

Итак,

$t + 7$ — время, за которое может выполнить работу объёма V первая бригада,

$t + 9$ — время, за которое может выполнить работу объёма V вторая бригада.

Умножая производительность на затраченное время, приходим к системе трёх уравнений (количество неизвестных равно четырём — x, y, t, V)

$$\begin{cases} V = x(t+7), \\ V = y(t+9), \\ V = (x+y)t. \end{cases}$$

Выразим неизвестные x и y из первых двух уравнений системы

$$x = \frac{V}{t+7}\,, \qquad y = \frac{V}{t+9}$$

и подставим в третье уравнение. В результате получим, что

$$\left(\frac{V}{t+7} + \frac{V}{t+9}\right) t = V.$$

После несложных преобразований приходим к квадратному уравнению относительно неизвестной t

$$t^2 - 63 = 0,$$

корни которого суть

$$t_1 = -3\sqrt{7} \quad \text{и} \quad t_2 = 3\sqrt{7}.$$

Первый из корней отбрасывается на основании того, что время, затрачиваемое на работу, не может быть отрицательным. Остаётся второй корень

$$t = 3\sqrt{7}.$$

Для ответа на вопрос, поставленный в задаче, необходимо сравнить полученное число с заданным. Переведём для этого

7 часов 57 минут в часы, представив время в виде рациональной дроби

$$7 \text{ часов } 57 \text{ минут} = \frac{159}{20} \text{ часа},$$

и сравним с $3\sqrt{7}$ часами. Имеем

$$\frac{159}{20} \vee 3\sqrt{7},$$

или, после деления обеих частей неравенства на 3,

$$\frac{53}{20} \vee \sqrt{7}.$$

Возведя обе части неравенства в квадрат, получим

$$\frac{2809}{400} \vee 7.$$

Нетрудно заметить, что дробь, располагающаяся в левой части, больше семи

$$\frac{2809}{400} = 7\,\frac{9}{400} > 7.$$

Так как ни деление обеих частей неравенства на 3, ни возведение в квадрат никак не могли повлиять на знак неравенства, скрытый за символом $\vee$, то он должен быть таким же, как и в неравенстве

$$\frac{2809}{400} > 7.$$

Следовательно, 7 часов 57 минут больше, чем $3\sqrt{7}$.

И обе бригады, работая одновременно, выполнят предложенную работу быстрее, чем за 7 часов 57 минут.

Ответ: да, выполнят.

Задача 5 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1995). На счёт, который вкладчик имел в начале первого квартала, в конце этого квартала начисляется r_1 процентов, а на ту сумму, которую вкладчик имел в начале второго квартала, в конце этого квартала начисляется r_2 процентов, причём $r_1 + r_2 = 150$. Вкладчик в начале первого квартала положил на счёт некоторую сумму, а в конце того же квартала половину этой суммы снял.

При каком значении r_1 счёт вкладчика в конце второго квартала окажется максимальным?

Решение: Обозначим через S ту сумму, которую вкладчик положил на счёт в начале первого квартала. Тогда к концу этого квартала на его счёт будет начислено

$$S \cdot \frac{r_1}{100}\,.$$

Тем самым, общее количество денег на счёте станет равным

$$S + S \cdot \frac{r_1}{100}\,.$$

После снятия половины суммы, положенной на счёт в начале первого квартала, на нём окажется сумма

$$S + S \cdot \frac{r_1}{100} - \frac{S}{2} = \frac{S}{2} + S \cdot \frac{r_1}{100}\,.$$

За второй квартал будет начислено

$$r_2 = 150 - r_1$$

процентов, что приведёт к сумме

$$\left(\frac{S}{2} + S \cdot \frac{r_1}{100}\right) \cdot \frac{150 - r_1}{100}\,.$$

В результате в конце второго квартала на счёте будет следующая сумма

$$\frac{S}{2} + S \cdot \frac{r_1}{100} + \left(\frac{S}{2} + S \cdot \frac{r_1}{100}\right) \cdot \frac{150 - r_1}{100}\,.$$

В задаче требуется определить значение величины r_1, при котором указанная сумма окажется максимально возможной.

Вынося S за скобки

$$S\left[\frac{1}{2} + \frac{r_1}{100} + \left(\frac{1}{2} + \frac{r_1}{100}\right) \cdot \frac{150 - r_1}{100}\right],$$

найдём наибольшее значение, которое способно принять выражение, располагающееся в квадратных скобках.

После несложных преобразований можно убедиться в том, что оно приобретет вид квадратного трёхчлена

$$-0{,}0001r_1^2 + 0{,}02r_1 + 0{,}5,$$

который принимает максимальное значение в той же точке, что и квадратичная функция

$$y = -0{,}0001x^2 + 0{,}02x + 0{,}5.$$

Графиком квадратичной функции является парабола, ветви которой в рассматриваемом случае направлены вниз. Поэтому наибольшего значения эта функция достигает при том значении x_0 переменной x, которое является абсциссой вершины этой параболы (рис. 10.2).

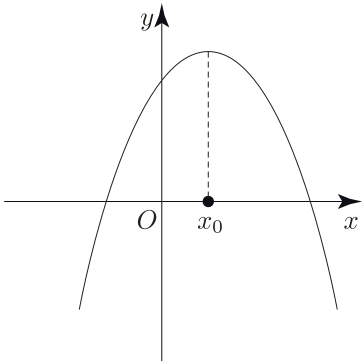


Рис. 10.2

Величину x_0 можно найти многими способами. Например, по формуле

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

где x_1 и x_2 — корни уравнения

$$-0{,}0001x^2 + 0{,}02x + 0{,}5 = 0.$$

Или так

$$x_0 = -\frac{b}{2a},$$

где

$$a = -0{,}0001, \quad \text{а} \quad b = 0{,}02.$$

Это значение можно найти и при помощи первой производной квадратичной функции — достаточно приравнять её к нулю:

$$y' = -0{,}0002x + 0{,}02 = 0.$$

Впрочем, каким бы из перечисленных выше способов мы ни воспользовались, результат будет одним и тем же —

$$x_0 = 100.$$

Таким образом, максимальное значение сумма

$$S\left[\frac{1}{2} + \frac{r_1}{100} + \left(\frac{1}{2} + \frac{r_1}{100}\right) \cdot \frac{150 - r_1}{100}\right]$$

принимает при

$$r_1 = 100\%.$$

Ответ: 100%.

Задача 6 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1986). В академическом собрании сочинений, включающем в себя менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с письмами, которых, в свою очередь, в три раза меньше, чем томов с публицистикой. Если число томов с художественными произведениями увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем томов с публицистикой.

Сколько томов с публицистикой содержит это собрание сочинений?

Решение: Так как тома считают на штуки, то эта задача относится к задачам на целые числа.

Обозначим через x число томов с письмами и, считая его известным, попытаемся описать условия задачи при помощи формул.

По этим условиям число томов с публицистикой должно быть равным $3x$, а число томов с художественными произведениями mx, где m — целочисленный (но неизвестный нам) коэффициент пропорциональности.

Тогда из того, что общее число томов в собрании сочинений меньше 20, получаем неравенство

$$mx + x + 3x < 20.$$

Второе соотношение можно найти, пользуясь тем, что если число томов с художественными произведениями увеличить в два раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами —

$$2mx = x + 14.$$

Выразив неизвестную x из последнего уравнения

$$x = \frac{14}{2m - 1}$$

и воспользовавшись тем, что и x и m могут принимать только целые значения, получим, что для выражения $2m - 1$ не так много возможностей. В самом деле, из того, что x — целое, вытекает, что нечётное число $2m - 1$ должно быть делителем

$$14 = 2 \cdot 7.$$

Отсюда получаем, что
либо

$$2m - 1 = 1,$$

либо

$$2m - 1 = 7.$$

Рассмотрим первую возможность

$$2m - 1 = 1.$$

Тогда $m = 1$ и $x = 14$. Подставляя найденные значения в левую часть неравенства

$$mx + x + 3x < 20,$$

получаем

$$1 \cdot 14 + 14 + 3 \cdot 14 = 70,$$

что никак не меньше 20. Тем самым, первая возможность исключается.

Обратимся ко второй возможности

$$2m - 1 = 7.$$

Отсюда $m = 4$ и $x = 2$. Подставляя найденные значения в левую часть того же неравенства, легко убеждаемся в том, что оно выполняется —

$$4 \cdot 2 + 2 + 3 \cdot 2 = 16 < 20.$$

Теперь осталось только подсчитать количество публицистических томов в этом собрании сочинений. Имеем

$$3x = 3 \cdot 2 = 6.$$

Ответ: 6 томов.

Задача 7. На мебельную фабрику поступил заказ на изготовление 240 гарнитуров одинаковой модели. Выполнение заказа поручили трём бригадам, работающим порознь и с разной производительностью. А так как при этом от выполнения других работ их не освободили, то выполнению этого заказа бригады могли уделять только часть рабочего времени. За пять недель работы первой бригады, три недели работы второй и две недели работы третьей было изготовлено всего 39 гарнитуров. За это время общее количество других работ сократилось, бригады смогли уделить заказу больше времени, и за четыре недели работы первой бригады, шесть недель работы второй и семь недель работы третьей было изготовлено ещё 69 гарнитуров.

За какое время бригады, работая одновременно, смогли бы выполнить весь заказ, если бы их не отвлекали на выполнение других работ?

Решение: Обозначим производительность первой бригады за x гарнитуров в неделю, второй — за y и третьей — за z.

Тогда первое из условий задачи можно записать так:

$$5x + 3y + 2z = 39,$$

а второе так:

$$4x + 6y + 7z = 69.$$

В результате мы получим систему из двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 5x + 3y + 2z = 39, \\ 4x + 6y + 7z = 69. \end{cases}$$

То, что условий меньше, чем неизвестных, не должно вас смущать. И вот почему — для ответа на вопрос, поставленный в этой задаче, нам нужна *суммарная* производительность одновременно работающих бригад. И её, в отличие от производительности каждой из бригад, при данных условиях вычислить совсем нетрудно.

В самом деле, сложив оба уравнения системы, получаем, что

$$9x + 9y + 9z = 108,$$

откуда

$$x + y + z = 12.$$

Теперь осталось только разделить количество заказанных гарнитуров на найденную суммарную производительность:

$$240 : 12 = 20.$$

Ответ: 20 недель.

Глава 11

ПРОГРЕССИИ

Напомним определения и основные формулы.

Последовательность чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ называется *арифметической* прогрессией, если разность между двумя её последовательными членами постоянна, т. е. для любого $n \geqslant 2$

$$a_n - a_{n-1} = d.$$

На основе этого определения легко показать, что, зная *первый член* арифметической прогрессии a_1 и её *разность* d, можно найти все остальные члены прогрессии по формуле

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Эту формулу называют *формулой общего члена* арифметической прогрессии.

Сумму n первых членов арифметической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

можно найти либо так

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

либо, используя формулу общего члена, так

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

При решении задач часто используется следующее *характеристическое* свойство: в арифметической прогрессии любой член (кроме, разумеется, первого и последнего) равен полусумме соседних с ним членов,

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}\,.$$

Справедливо и обратное утверждение: если n чисел, расположенных в определённом порядке, таковы, что каждое из них (кроме первого и последнего) равно полусумме соседних с ним чисел, то эти числа образуют арифметическую прогрессию.

Это свойство можно обобщить следующим образом: в арифметической прогрессии для любых чисел k и l $(k > l)$

$$a_k = \frac{a_{k-l} + a_{k+l}}{2}\,.$$

Из формулы для общего члена легко выводится ещё одно свойство арифметической прогрессии: для любых чисел k, l, m, n, таких, что $k + l = n + m$, справедливо равенство

$$a_k + a_l = a_m + a_n.$$

Геометрическую прогрессию удобно определить следующим образом.

Последовательность b_1,b_2,...,b_n называется *геометрической* прогрессией, если существуют такие числа a и q, что

$$b_1 = a, b_2 = aq,...,b_n = aq^{n-1}.$$

Число $a = b_1$ — называется *первым членом* геометрической прогрессии, а q — её *знаменателем.*

Формула

$$b_k = b_1 q^{k-1}$$

называется *формулой общего члена* геометрической прогрессии.

В случае, если $q = 1$, т. е. все члены прогрессии равны друг другу, сумма

$$S_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$$

n её первых членов равна nb_1.

Если же q отлично от 1, то

$$S_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\,.$$

Свойства геометрической прогрессии:

1 (*характеристическое*). В геометрической прогрессии квадрат любого члена (кроме первого и последнего) равен

произведению соседних с ним членов, т. е. для любого k верно равенство

$$b_k{}^2 = b_{k-1}b_{k+1}.$$

Справедливо и обратное утверждение: если числа, расположенные в определённом порядке таковы, что квадрат каждого из них (кроме первого и последнего) равен произведению соседних с ним членов, то эти числа составляют геометрическую прогрессию.

Это свойство можно обобщить следующим образом: в геометрической прогрессии для любых чисел k и l $(k > l)$

$$b_k{}^2 = b_{k-l}b_{k+l}.$$

2. В геометрической прогрессии для любых чисел k, l, m, n, таких, что $k + l = n + m$, справедливо равенство

$$b_k b_l = b_n b_m.$$

Перейдём к рассмотрению задач.

Задача 1 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1993). Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найдите сумму первых семи членов этой прогрессии.

Решение: Представим искомую сумму через первый член и разность прогрессии. Имеем

$$S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7.$$

Из условия задачи получаем, что

$$8 = a_3 + a_5 = a_1 + 2d + a_1 + 4d = 2a_1 + 6d.$$

Следовательно, $S_7 = 28$.

Ответ: 28.

Задача 2 (географический факультет МГУ, 1990). Сумма пятого и шестого членов арифметической прогрессии равна частному от деления девятого члена на второй. Найдите девятый член прогрессии, если известно, что второй её член равен 2.

Решение: Поскольку

$$a_2 = a_1 + d, a_5 = a_1 + 4d, a_6 = a_1 + 5d, a_9 = a_1 + 8d,$$

из условия задачи заключаем, что

$$2a_1 + 9d = \frac{a_1 + 8d}{2},$$

$$a_1 + d = 2.$$

Решив получившуюся систему двух уравнений с двумя неизвестными a_1 и d, можно легко найти a_9.

Можно поступить и по-иному: заметив, что $5 + 6 = 9 + 2$, использовать соответствующее свойство арифметической прогрессии,

$$a_5 + a_6 = a_9 + a_2.$$

Это даёт возможность решить задачу буквально в одну строчку,

$$a_9 + 2 = \frac{a_9}{2}.$$

Отсюда $a_9 = -4$.

Ответ: $a_9 = -4$.

Задача 3 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1995). Найдите x, если известно, что числа -1, $x + 2$, $\sin(\arcsin x)$, взятые в указанном порядке, образуют геометрическую прогрессию.

Решение: Из определения обратной тригонометрической функции $\arcsin x$ вытекает, что $|x| \leqslant 1$ и $\sin(\arcsin x) = x$. Это даёт возможность заменить заданную тройку на новую

$$-1, \quad x + 2, \quad x,$$

где $|x| \leqslant 1$.

Согласно одному из свойств геометрической прогрессии,

$$(x + 2)^2 = (-1) \cdot x.$$

Как легко убедиться, корнями этого уравнения являются числа -4 и -1, из которых пригодным является лишь $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Задача 4 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1996). Числа a, b, c, d являются последовательными членами геометрической прогрессии. Известно, что $a + d = 10$, а $ad = 7$. Найдите сумму $b^3 + c^3$.

Решение: Свойства геометрической прогрессии позволяют записать следующие равенства

$$b^2 = ac, c^2 = bd, ad = bc$$

(a и d — это первый и четвёртый члены геометрической прогрессии, а b и c — второй и третий, $1 + 4 = 2 + 3$).

Учитывая эти равенства, можно определить и искомую сумму,

$$b^3 + c^3 = (b^2)b + (c^2)c = acb + bdc = bc(a + d) = ad(a + d) = 70.$$

Ответ: 70.

Задача 5. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 8, то прогрессия станет арифметической. Если же после этого увеличить последнее число на 64, то прогрессия вновь станет геометрической. Найдите эти числа.

Решение: Поскольку заданные числа образуют геометрическую прогрессию, их можно записать как

$$b, bq, bq^2.$$

Из условия задачи следует, что числа

$$b, bq + 8, bq^2$$

образуют арифметическую прогрессию, а числа

$$b, bq + 8, bq^2 + 64$$

геометрическую.

Используя характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий, легко составить систему уравнений для определения b и q,

$$\begin{cases} 2(bq + 8) = b + bq^2, \\ (bq + 8)^2 = b(bq^2 + 64). \end{cases}$$

После приведения подобных приходим к равносильной системе

$$\begin{cases} bq^2 - 2bq + b = 16, \\ 64b - 16bq = 64. \end{cases}$$

Вынесем b из правых частей обоих уравнений и, разделив обе части второго уравнения на 16, получим, что

$$\begin{cases} b(q^2 - 2q + 1) = 16, \\ b(4 - q) = 4. \end{cases}$$

Поделим первое уравнение системы на второе (это часто встречающийся приём при решении систем). В результате получим уравнение для определения q,

$$\frac{q^2 - 2q + 1}{4 - q} = 4.$$

Корнями этого уравнения являются $q_1 = 3$ и $q_2 = -5$.

Подставляя полученные значения q во второе уравнение последней системы, находим, что $q = 3$ соответствует $b = 4$, а $q = -5$ соответствует $b = \frac{4}{9}$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют две геометрические прогрессии (две тройки чисел):

$$4, 12, 36$$

и

$$\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}.$$

Ответ:

$$4, 12, 36; \qquad \frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}.$$

Задача 6 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 2003). Сумма первых тридцати членов геометрической прогрессии с ненулевым первым членом и ненулевым знаменателем равна удвоенной сумме её первых десяти членов. Найдите знаменатель этой прогрессии.

Решение: Заметим прежде всего, что знаменатель прогрессии не равен 1. В противном случае имело бы место равенство

$$S_{30} = 30b_1 = 3S_{10},$$

противоречащее условию задачи, согласно которому

$$S_{30} = 2S_{10}.$$

Следовательно, $q \neq 1$ и условие задачи можно записать следующим образом

$$\frac{b_1(q^{30}-1)}{q-1} = \frac{2b_1(q^{10}-1)}{q-1}\,.$$

Отсюда

$$q^{30} - 1 = 2(q^{10} - 1).$$

Используя формулу разности кубов,

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

можно перейти к равносильному уравнению

$$(q^{10} - 1)(q^{20} + q^{10} - 1) = 0.$$

Это уравнение, как легко убедиться (проделайте это сами!), имеет корни

$$q_1 = 1, q_2 = -1, q_3 = \sqrt[10]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, q_4 = -\sqrt[10]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Первый из них, как мы установили в самом начале нашего решения, не подходит.

Ответ:

$$q_1 = -1, q_2 = \sqrt[10]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, q_3 = -\sqrt[10]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Задача 7. Найдите числа, составляющие арифметическую прогрессию, зная, что сумма первых четырёх её членов равна 68, сумма последних четырёх членов равна -36, а сумма всех членов равна 68.

Решение: Пусть a_1 — первый член прогрессии, a_n — её последний член и d — разность. Тогда из условия задачи вытекает, что

$$\frac{2a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = 68$$

и

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 68.$$

Зная разность d арифметической прогрессии и её последний член a_n, можно найти предшествующие ему члены этой прогрессии

$$a_{n-1} = a_n - d, a_{n-2} = a_n - 2d, a_{n-3} = a_n - 3d.$$

Это позволяет записать третье уравнение,

$$\frac{2a_n - 3d}{2} \cdot 4 = -36.$$

Сложив первое и третье уравнения полученной системы, мы обнаружим, что $a_1 + a_n = 8$. Из второго уравнения сразу же следует, что $n = 17$. Отсюда $a_n = a_{17} = a_1 + 16d$, и третье уравнение принимает вид $2a_1 + 29d = -18$.

Остаётся решить систему

$$\begin{cases} 2a_1 + 3d = 34, \\ 2a_1 + 29d = -18, \end{cases}$$

из которой получаем, что $a_1 = 20, d = -2$.

Ответ: $a_1 = 20, d = -2, n = 17$.

Задача 8. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, делящихся на 7.

Решение: Ясно, что числа, сумму которых надо найти, образуют арифметическую прогрессию с разностью 7, первый член которой равен 105 (это наименьшее трёхзначное число, которое делится на 7), а последний 994 (это наибольшее трёхзначное число, которое делится на 7). Количество n этих чисел найдём, используя формулу общего члена арифметической прогрессии. Имеем

$$994 = 105 + 7(n - 1),$$

откуда $n = 128$.

Следовательно, искомая сумма равна

$$\frac{105 + 994}{2} \cdot 128 = 70336.$$

Ответ: 70336.

Задача 9 (географический факультет МГУ, 1993). При каких значениях a четыре корня уравнения

$$x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Решение: Предположим, что заданное (биквадратное!) уравнение имеет четыре корня x_1, x_2, x_3 и x_4.

Заметим, что все они отличны от нуля: при $a = -2$ заданное уравнение имеет корни $-\sqrt{7}$, 0, 0, $\sqrt{7}$, которые арифметической прогрессии не образуют. Поэтому можно считать, что

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4,$$

причём

$$x_4 = -x_1, x_2 = -x_3.$$

Обозначим через t меньший положительный корень уравнения (это x_3). Поскольку меньший по абсолютной величине отрицательный корень x_2 равен $-t$, то разность арифметической прогрессии, членами которой являются корни нашего уравнения, равна $2t$ (см. рис. 11.1). Отсюда легко найти и остальные два корня.

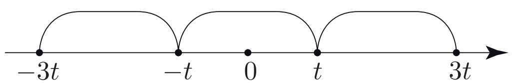


Рис. 11.1

Итак, корни нашего уравнения можно записать в следующем виде

$$x_1 = -3t, x_2 = -t, x_3 = t, x_4 = 3t, \qquad (\star)$$

где $t > 0$.

Сделав в уравнении замену $z = x^2$, придём к квадратному уравнению

$$z^2 + (a-5)z + (a+2)^2 = 0,$$

корни которого z_1 и z_2 связаны формулами Виета,

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -(a-5), \\ z_1 z_2 = (a+2)^2. \end{cases}$$

В силу соотношений $(\star)$ корни z_1 и z_2 можно представить так: $z_1 = t^2, z_2 = 9t^2$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} t^2 + 9t^2 = -a + 5, \\ t^2 \cdot 9t^2 = (a+2)^2. \end{cases}$$

Выразим t^2 из первого уравнения и подставим результат во второе. Получим уравнение

$$91a^2 + 490a + 175 = 0,$$

которое имеет два корня

$$a_1 = -5, a_2 = -\frac{5}{13}\,.$$

Осталось проверить, действительно ли при этих значениях параметра a исходное уравнение имеет четыре корня, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии.

Поиск корней исходного биквадратного уравнения при $a = -5$ и при $a = -\dfrac{5}{13}$ приводит к следующим четвёркам чисел:

$$x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 1, x_4 = 3,$$

и

$$x_1 = -3\sqrt{\frac{7}{13}}, x_2 = -\sqrt{\frac{7}{13}}, x_3 = \sqrt{\frac{7}{13}}, x_4 = 3\sqrt{\frac{7}{13}}.$$

Ответ: $a_1 = -5$, $a_2 = -\dfrac{5}{13}$.

Задача 10 (социологический факультет МГУ, 1998). Найдите все натуральные значения параметра n, при каждом из которых задача: «Найти арифметическую прогрессию, если известны её девятнадцатый член и сумма её первых n членов» не имеет решений, или её решением является бесконечное множество арифметических прогрессий.

Решение: Пусть a_1 — первый член арифметической прогрессии и d — разность. Выразим через эти величины и число n членов прогрессии известные по условию задачи a_{19} и S_n. Получим два уравнения

$$a_{19} = a_1 + 18d$$

и

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Исключая a_1, после несложных преобразований получим, что

$$2S_n = (2a_{19} - 37d + nd)n.$$

Перенесём влево все члены, содержащие неизвестную d, и вынесем её за скобки. Имеем

$$d(37n - n^2) = 2a_{19} - 2S_n.$$

Для определения арифметической прогрессии необходимо найти d. При

$$37n - n^2 \neq 0$$

это всегда возможно.

Но вспомним о том, что требуется в условии —

задача «Найти арифметическую прогрессию, если известны её девятнадцатый член и сумма её первых n членов», либо не должна иметь решений, либо её решением является бесконечное множество арифметических прогрессий.

Если требуемое и возможно, то только при условии, что

$$37n - n^2 = 0,$$

т. е. при $n = 0$ и $n = 37$.

Из того, что число членов арифметической прогрессии не может быть равным нулю, остаётся лишь $n = 37$.

1-й случай. Если $2a_{19} - 2S_n \neq 0$, то задача определения арифметической прогрессии не имеет решений,

2-й случай. Если $2a_{19} - 2S_n = 0$, то задача определения арифметической прогрессии имеет бесконечное множество решений.

Ответ: $n = 37$.

Глава 12

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

В этой главе вашему вниманию предложены задачи, решение которых основывается на свойствах целых чисел. Напомним, что *целыми* называются числа вида

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Обычно множество целых чисел обозначается так: **Z**.

И хотя некоторые из таких задач встречаются как вспомогательные при решении других задач нашего пособия (например, в текстовых задачах, в задачах на координатной плоскости, в задачах с параметром), мы выделили их в отдельный раздел.

Задача 1. Найдите все пары целых чисел m и n, связанных равенством

$$5m = 3n.$$

Решение: Таких пар много, и указать часть из них совсем нетрудно, но нам нужно описать *все*.

Заметим прежде всего, что если m — целое число, то этим свойством обладает и произведение $5m$. Аналогично можно утверждать, что произведение $3n$ является целым числом, если n — целое.

Теперь обратим внимание на то, что целые положительные числа 5 и 3 не имеют общих положительных целых множителей кроме 1. Отсюда можно сделать следующий важный вывод: из того, что при целом m произведение $5m$ делится на 5, равное ему по условию задачи произведение $3n$ также должно делиться на 5. А так как 5 и 3 — взаимно простые числа (их общий множитель равен 1), то на 5 непременно должен делиться второй сомножитель этого произведения, т. е. n. Иными словами, целое число n должно быть кратно 5. Это записывается так

$$n = 3k,$$

где k — целое число ($k \in \mathbf{Z}$).

Заменим n в исходном равенстве на $5k$,

$$5m = 3 \cdot 5k,$$

и, поделив обе части на 5, получим, что

$$m = 3k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Теперь мы можем выписать искомые пары целых чисел –

$$(0{,}0), (3{,}5), (-3, -5), (6{,}10), (-6, -10), \ldots$$

или, более компактно,

$$m = 3k, \quad n = 5k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $m = 3k, n = 5k, k \in \mathbf{Z}$.

Задача 2. Найдите все пары целых чисел a и b, связанных равенством

$$7a - 4b = 5.$$

Решение этой задачи разобьём на два этапа.

Сначала найдём (подбором) какую-нибудь пару, связанную заданным равенством. Положим, к примеру, $a = 3$ и $b = 4$. Тогда

$$7 \cdot 3 - 4 \cdot 4 = 5.$$

Приравняем левые части этих равенств (правые равны 5),

$$7a - 4b = 7 \cdot 3 - 4 \cdot 4,$$

а затем перейдём от полученного соотношения к равносильному

$$7(a - 3) = 4(b - 4).$$

Дальнейшие рассуждения почти не отличаются от тех, что были приведены при решении задачи 1.

Так как выражение в левой части последнего равенства при целом a есть целое число, то этим свойством должно обладать и выражение в его правой части, а вследствие того, что 1 — единственный (целый положительный) общий множитель 7 и 4, на 7 должен делиться сомножитель $b-4$.

Это можно записать так

$$b-4=7k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Заменяя в предыдущем равенстве $b-4$ на $7k$, после деления обеих частей на 7 получим, что

$$a-3=4k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Тем самым,

$$a-3=4k, \quad b-4=7k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $a=4k+3, \quad b=7k+4, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Задача 3 (факультет государственного управления МГУ, 2004). На плоскости Oxy найдите наибольшее расстояние между точками с координатами (x,y), такими, что x и y являются целыми числами и удовлетворяют уравнению

$$4 \cdot \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{15}{xy}\,.$$

Решение начнём с описания области допустимых значений переменных x и y. Вот эта область –

$$x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Заметим теперь, что нам нужно найти две неизвестных величины x и y при одном связывающем их уравнении. Одно это уже достаточно необычно. Правда, нас интересуют не все значения x и y, а только целые. Запомним это.

Упростим заданное уравнение, умножив обе его части на произведение xy. В результате получим, что

$$4x^2-y^2=15.$$

Выражение в левой части этого уравнения представляет собой разность квадратов. Воспользовавшись известной формулой

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

мы можем переписать уравнение в следующем виде

$$(2x - y)(2x + y) = 15.$$

В общем случае такое разложение большой пользы не принесёт и вряд ли поможет. Но вспомним, что в данной задаче на переменные x и y наложены дополнительные условия: обе неизвестные величины должны принимать только целые ненулевые значения. Посмотрим, что может дать нам это ограничение.

Пусть a и b — целые числа (это записывается так: $a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{Z}$). Тогда справедливы следующие простые утверждения:

1. $a + b$ — целое число ($a + b \in \mathbf{Z}$),
2. $a - b$ — целое число ($a - b \in \mathbf{Z}$),
3. $a \cdot b$ — целое число ($a \cdot b \in \mathbf{Z}$).

Иными словами, сумма, разность и произведение целых чисел также являются целыми числами.

В задаче, которую мы решаем, неизвестные x и y должны быть целыми. А значит, целыми должны быть и $2x - y$, и $2x + y$, т. е.

$$2x - y \in \mathbf{Z}, \quad 2x + y \in \mathbf{Z}.$$

Отсюда вытекает, что число 15, равное их произведению, должно делиться на каждое из них без остатка,

$$\frac{15}{2x - y} = 2x + y \in \mathbf{Z}, \quad \frac{15}{2x + y} = 2x - y \in \mathbf{Z}.$$

Рассмотрим все возможные случаи, когда произведение двух целых чисел равно 15. Их всего четыре:

$$15 = 5 \cdot 3 = (-5) \cdot (-3) = 15 \cdot 1 = (-15) \cdot (-1).$$

Прежде чем переходить к исследованию этих случаев, заметим, что каждый из них допускает две возможности.

Итак,

1-й случай:

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 2x + y = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 3, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$$

Обратимся к первой из этих систем

$$\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

Сложим её уравнения, т. е. к левой части первого уравнения прибавим левую часть второго и к правой части первого уравнения прибавим правую часть второго, и в результате получим уравнение, не содержащее неизвестной y,

$$4x = 8,$$

или, что то же,

$$x = 2.$$

Для того чтобы найти соответствующее значение y, можно вычесть из второго уравнения системы её первое уравнение. Запишем полученный результат

$$2y = -2,$$

или, что то же,

$$y = -1.$$

Можно поступить и по-другому, просто подставив найденное значение x в любое из уравнений системы. Результат будет тем же.

Подведём первый итог: решением рассматриваемой системы является пара $(2, -1)$.

Повторяя приведённые рассуждения для второй из выписанных систем, легко найти решение — это пара $(2{,}1)$.

Для каждого из оставшихся трёх случаев выпишем соответствующие системы вместе с их решениями.

2-й случай:

$$\begin{cases} 2x - y = -5, \\ 2x + y = -3, \end{cases} \qquad (-2{,}1)$$

$$\begin{cases} 2x - y = -3, \\ 2x + y = -5. \end{cases} \qquad (-2, -1)$$

3-й случай:

$$\begin{cases} 2x - y = 15, \\ 2x + y = \ \ 1, \end{cases} \qquad (4, -7)$$

$$\begin{cases} 2x - y = \ \ 1, \\ 2x + y = 15. \end{cases} \qquad (4{,}7)$$

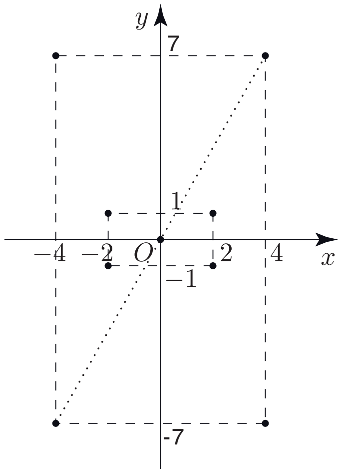


Рис. 12.1

4-й случай:

$$\begin{cases} 2x - y = -15, \\ 2x + y = \ \ -1, \end{cases} \qquad (-4{,}7)$$

$$\begin{cases} 2x - y = \ \ -1, \\ 2x + y = -15. \end{cases} \qquad (-4, -7)$$

Итак, мы получили координаты восьми точек на плоскости, абсцисса и ордината каждой из которых при подстановке в заданное уравнение вместо неизвестных x и y обращают его в верное равенство (тождество).

Для ответа на вопрос, поставленный в задаче, полезно нанести найденные точки на координатную плоскость. Это поможет нам увидеть наиболее удалённую пару точек (рис. 12.1).

Точки, полученные в первых двух случаях являются вершинами малого прямоугольника, а точки, полученные в двух других случаях — вершинами большого прямоугольника (см. рис. 12.1).

Теперь уже совсем легко заметить, что искомым максимальным расстоянием будет длина диагонали большого прямоугольника, стороны которого равны 8 и 14 соответственно.

Пользуясь теоремой Пифагора, получаем, что расстояние между противоположными вершинами большего прямоугольника равно

$$\sqrt{8^2+14^2}=\sqrt{64+196}=\sqrt{260}=2\sqrt{65}.$$

Ответ: $2\sqrt{65}$.

Замечание 1. Неторопливо разглядывая исходное уравнение, несложно заметить, что если пара $(x_\star, y_\star)$ является её решением, то этим же свойством обладают ещё три пары $(-x_\star, y_\star)$, $(x_\star, -y_\star)$ и $(-x_\star, -y_\star)$. Поэтому достаточно найти решения только двух (а не восьми!) систем. Например, системы

$$\begin{cases} 2x-y=3, \\ 2x+y=5, \end{cases} \qquad (2{,}1)$$

и системы

$$\begin{cases} 2x-y=\ \ 1, \\ 2x+y=15. \end{cases} \qquad (4{,}7)$$

Замечание 2. Есть ещё один способ поиска наибольшего расстояния между двумя точками, координаты которых описываются заданным уравнением (более подробно он описан в главе 13 "Задачи на координатной плоскости"). Пусть $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ — точки координатной плоскости. Тогда длина отрезка, соединяющего эти точки, равна

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}.$$

Воспользуемся этой формулой и вычислим расстояние между точками с координатами $(-4{,}7)$ и $(4,-7)$. Имеем

$$\sqrt{(-4-4)^2+(7-(-7))^2}=\sqrt{8^2+14^2}=2\sqrt{65}.$$

Задача 4 (факультет государственного управления МГУ, 2004). Компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причём каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 20 долларов, а каждой женщине — 16 долларов 30 центов. Все женщины согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалась. Общая сумма выплаченного вознаграждения составила 5705 долларов. Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

Решение: Предположим, что x из этих 350 служащих — женщины, а остальные $350 - x$ — мужчины, y из которых отказались от предложения выполнить сверхурочную работу.

Тем самым, плату за сверхурочную работу получили x женщин и $350-x-y$ мужчин. При этом женщинам было выплачено $16{,}3 \cdot x$ долларов, а мужчинам $20 \cdot (350 - x - y)$, и значит, всего было выплачено $16{,}3 \cdot x + 20 \cdot (350 - x - y)$ долларов.

Поскольку общая сумма выплаченного вознаграждения по условию известна и составляет 5705 долларов, это позволяет написать равенство

$$16{,}3 \cdot x + 20 \cdot (350 - x - y) = 5705.$$

Преобразуем последнее соотношение, раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые. В результате получим, что

$$20y + 3{,}7x = 1295.$$

Умножив обе части этого равенства на 10, перейдём к равенству с целыми коэффициентами

$$200y + 37x = 12950.$$

Вследствие того, что неизвестные пока x и y являются положительными целыми числами (напомним, что они суть число женщин и число отказавшихся мужчин), оба слагаемых в левой части полученного равенства также должны быть положительными целыми числами, причём первое из слагаемых должно делиться на 200, а второе — на 37. Отсюда следует, что для того чтобы найти искомые значения x и y, необходимо представить число 12950 в правой части этого соотношения в виде суммы двух положительных целых чисел с описанными свойствами. Но прежде сделаем важное наблюдение, а именно: заметим, что

$$12950 = 37 \cdot 350.$$

Учитывая это обстоятельство и перенося $37x$ в правую часть, после простых преобразований получим, что

$$200y = 37(350 - x).$$

Теперь можно приступать к основному рассуждению: левая часть последнего равенства делится на 200 и для того чтобы поставленная задача имела решение, необходимо, чтобы и правая его часть также делилась на 200. Так как 37 и 200 не имеют общих множителей, отличных от 1, то на 200 должен делиться второй сомножитель, т. е. $350 - x$.

Кроме того этот сомножитель должен подчиняться следующим требованиям:

$$350 - x > 0$$

(равенство $x = 350$ означало бы, что среди служащих, которым было предложено вознаграждение, были только женщины, а по условию это не так) и

$$350 - x < 350$$

(равенство $x = 0$ означало бы, что среди служащих, которым было предложено вознаграждение, были только мужчины, а по условию это не так).

Объединим эти требования,

$$0 < 350 - x < 350.$$

Единственное целое число, которое удовлетворяет выписанному условию и делится на 200, это именно 200. Тем самым,

$$350 - x = 200$$

и $x = 150$.

Заменяя x в равенстве

$$200y = 37(350 - x).$$

на 150, получаем

$$200y = 37 \cdot 200,$$

откуда $y = 37$.

Теперь, зная сумму вознаграждения, выплаченную за сверхурочную работу каждой из 150 женщин, можно подсчитать общую сумму вознаграждения 150 женщин,

$$16{,}3 \cdot 150 = 2445.$$

Ответ: 2445 долларов.

Задача 5 (геологический факультет МГУ, 1999). Решите уравнение

$$\cos(6\sin x) = -1.$$

Решение: Введём новую переменную

$$y = 6\sin x.$$

Из того, что

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

для любого x, вытекает неравенство

$$-6 \leqslant 6\sin x \leqslant 6,$$

или, с учётом введённого обозначения,

$$-6 \leqslant y \leqslant 6.$$

Выпишем решение уравнения

$$\cos y = -1.$$

Имеем

$$y = \pi + 2\pi k,$$

где k — целое число, т. е. $k \in \mathbf{Z}$.

Объединяя все требования, которым должна подчиняться неизвестная y, получим следующую систему соотношений

$$\begin{cases} y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}, \\ -6 \leqslant y \leqslant 6. \end{cases}$$

Ясно, что неравенство в этой системе накладывает жёсткие ограничения на целочисленную переменную k (которая не может быть слишком большой, так как возможные значения y ограничены сверху числом 6, и не может быть слишком малой, так как возможные значения y ограничены снизу числом -6).

Применим метод разумного перебора — будем перебирать целые значения переменной k, начиная с $k = 0$, как в сторону их увеличения, так и в сторону уменьшения до тех пор, пока не выйдем за пределы неравенства

$$-6 \leqslant y \leqslant 6.$$

Итак,

1. при $k = 0$ получаем значение $y = \pi$, удовлетворяющее условию $-6 < \pi < 6$,

2. при $k = 1$ получаем, что найденное значение $y = 5\pi > 5 \cdot 3 = 15 > 6$ выходит за рамки допустимого изменения y (нетрудно проверить, что бо́льшие значения k, $k = 2{,}3, \ldots,$ дадут такой же результат),

3. при $k = -1$ получаем, что найденное значение $y = -3\pi < -3 \cdot 3 = -9 < -6$ выходит за рамки допустимого изменения y (нетрудно проверить, что меньшие значения k, $k = -2, -3, \ldots,$ дадут такой же результат).

Таким образом,

$$y = \pi$$

является единственным решением предъявленной системы.

Переменная y отыграла свою вспомогательную роль. Вновь вспоминая об искомой x, получаем равенство

$$6 \sin x = \pi$$

или, что то же,

$$\sin x = \frac{\pi}{6}\,.$$

Отсюда, воспользовавшись общей формулой решения уравнения $\sin x = a$, приходим к соотношению

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin \dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$

Задача 6 (факультет психологии МГУ, 1985). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x и y, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} 3x^2 + 11xy + 10y^2 = 7, \\ x + y > 0, \\ 4a^2x - 3ay < 0. \end{cases}$$

Решение: Начнём с первого условия

$$3x^2 + 11xy + 10y^2 = 7.$$

Ранее мы уже описали один из подходов к решению уравнений с целыми числами, который состоит в том, что выражение, содержащее неизвестные x и y, разлагается на целочисленные множители. Попробуем применить его и в этом случае, воспользовавшись одним из свойств квадратного трёхчлена.

Напомним, что если коэффициенты квадратного уравнения

$$at^2 + bt + c = 0$$

связаны соотношением

$$b^2 - 4ac > 0,$$

то оно имеет два корня

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad t_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a},$$

при помощи которых соответствующий квадратный трёхчлен можно записать в следующем виде

$$at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2).$$

Выражение

$$3x^2 + 11xy + 10y^2$$

в предположении, что y — известное нам число, можно рассматривать как квадратный трёхчлен относительно x.

Приравняем этот квадратный трёхчлен к нулю,

$$3x^2 + 11xy + 10y^2 = 0,$$

и найдём его корни. Имеем

$$x_1 = \frac{-11y - \sqrt{(11y)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10y^2}}{2 \cdot 3} = \frac{-11y - y}{6} = -2y,$$

$$x_2 = \frac{-11y + y}{6} = -\frac{5y}{3}.$$

С учётом сказанного выше выражение $3x^2 + 11xy + 10y^2$ можно записать так

$$3x^2 + 11xy + 10y^2 = 3(x + 2y)\left(x + \frac{5y}{3}\right).$$

Вспомним первое из условий заданной системы и, приравняв правую часть последнего равенства к 7, после простых преобразований получим

$$(x+2y)(3x+5y)=7.$$

Так как x и y — целые числа, то этим же свойством наделены оба сомножителя — и $x+2y$, и $3x+5y$. Вместе с тем, число 7 — простое, и значит, его можно записать в виде произведения двух целых чисел лишь двумя способами
либо так

$$7=1\cdot 7,$$

либо так

$$7=(-1)\cdot(-7).$$

Это позволяет переписать предшествующее равенство
либо так

$$(x+2y)(3x+5y)=1\cdot 7,$$

либо так

$$(x+2y)(3x+5y)=(-1)\cdot(-7).$$

Таким образом, привлёкшее наше внимание уравнение сводится к четырём системам уравнений

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ 3x+5y=7, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y=7, \\ 3x+5y=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=-1, \\ 3x+5y=-7, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y=-7, \\ 3x+5y=-1. \end{cases}$$

Последовательно решая выписанные системы уравнений, получим четыре пары неизвестных x и y:

$$\begin{array}{llll} 1. x=-33, & y=20, & 2. x=9, & y=-4, \\ 3. x=33, & y=-20, & 4. x=-9, & y=4, \end{array}$$

Второму условию задачи

$$x+y>0$$

удовлетворяют только вторая и третья пары –

$$x=9, y=-4, \quad x=33, y=-20.$$

Обратимся к третьему условию

$$4a^2x - 3ay < 0.$$

Подставив сюда $x = 9, y = -4$, получим, что

$$36a^2 + 12a < 0,$$

или, что то же,

$$a\left(a + \frac{1}{3}\right) < 0.$$

Решая неравенство методом интервалов (рис. 12.2), найдём соответствующие значения параметра a,

$$a \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right).$$

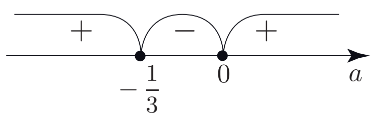


Рис. 12.2

Поступая аналогичным образом с парой $x = 33, y = -20$, получим, что

$$132a^2 + 60 < 0,$$

или, что то же,

$$a\left(a + \frac{5}{11}\right) < 0.$$

Решая неравенство методом интервалов (рис. 12.3), найдём соответствующие значения параметра a,

$$a \in \left(-\frac{5}{11}, 0\right).$$

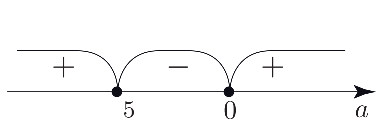


Рис. 12.3

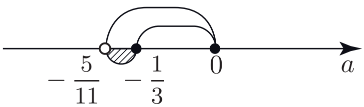


Рис. 12.4

Перенесём оба промежутка изменения параметра на один рисунок (см. рис. 12.4).

Нетрудно видеть, что при $a \in (-1/3{,}0)$ обе найденные пары подчиняются всем трём условиям исходной системы (а нужна только одна!).

В то же время при

$$-\frac{5}{11} < a \leqslant -\frac{1}{3}$$

всем трём условиям исходной системы удовлетворяет лишь одна пара, а именно,

$$x = 33, y = -20.$$

Ответ: $-5/11 < a- \leqslant 1/3$.

Глава 13

ЗАДАЧИ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Обратимся к особому классу задач, которые можно в равной степени отнести как к алгебраическим, так и к геометрическим. Это задачи, при поиске решения которых используется координатная плоскость.

Задача 1 (экономический факультет МГУ, 1972). Найдите и изобразите на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} (1-x)(x+y+3)(2x-y)=0, \\ (x-1)(3x+3y+1)=0. \end{cases}$$

Решение: Сразу же стоит обратить внимание на следующее обстоятельство (ключевое для поиска решений предъявленной системы уравнений): выражения в левых частях обоих уравнений суть произведения, а правые части равны нулю.

Ещё одно важное наблюдение: при $x = 1$ оба уравнения обращаются в верные равенства при любом значении y.

Из этого можно сделать вывод о том, что пара $(1, y)$, где y — любое действительное число, является решением заданной системы. На координатной плоскости решениям такого вида соответствует вертикальная прямая $x = 1$ (рис. 13.1).

Исключив это значение переменной x из наших дальнейших рассмотрений, придём к более простой системе

$$\begin{cases} (x+y+3)(2x-y)=0, \\ 3x+3y+1=0. \end{cases}$$

Первое из соотношений этой системы выполняется, если либо

$$x+y+3=0,$$

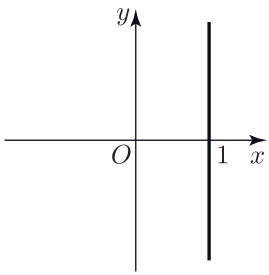


Рис. 13.1

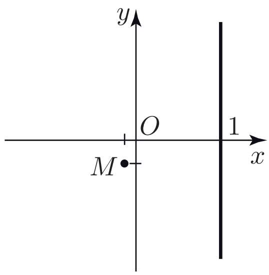


Рис. 13.2

либо

$$2x - y = 0.$$

Рассматривая каждое из них вместе со вторым соотношением, получим две системы уравнений

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0, \\ 3x + 3y + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 0, \\ 3x + 3y + 1 = 0. \end{cases}$$

Как совсем легко проверить, первая из этих систем решений не имеет. Что касается второй системы, то, заменив во втором её уравнении y на $2x$, получим, что

$$x = -\frac{1}{9}, \quad y = -\frac{2}{9}.$$

Ответ: в данной задаче можно представить как аналитически (в виде формул): $(1, y)$, где y — любое вещественное число,

$$M\left(-\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}\right),$$

так и графически (рис. 13.2).

Задача 2 (экономический факультет МГУ, 2001): На координатной плоскости заданы точки $A(0{,}2)$, $B(1{,}7)$, $C(10{,}7)$ и $D(7{,}1)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где E — точка пересечения прямых AC и BD.

Решение этой задачи начнём с аккуратного построения чертежа.

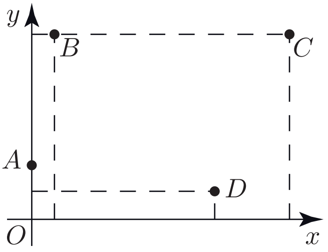


Рис. 13.3

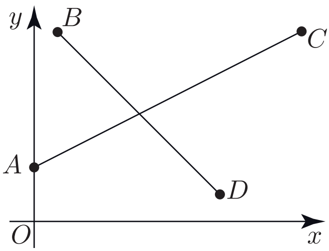


Рис. 13.4

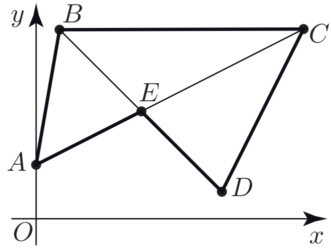


Рис. 13.5

Сначала нанесём на координатную плоскость Oxy заданные точки A, B, C и D (рис. 13.3). Затем проведём отрезки AC и BD (рис. 13.4) и выделим интересующий нас пятиугольник $ABCDE$ (рис. 13.5).

Ясно, что для вычисления площади пятиугольника $ABCDE$ нам совершенно необходимо найти координаты точки E. Эта точка является точкой пересечения прямых AC и BD, уравнения которых нужно найти.

Уравнение прямой AC найдём, записав его в общем виде

$$y = kx + b$$

и потребовав, чтобы точки $A(0{,}2)$ и $C(10{,}7)$ лежали на этой прямой. Это приведёт нас к системе из двух уравнений

$$\begin{cases} 2 = k \cdot 0 + b, \\ 7 = k \cdot 10 + b. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $b = 2$, $k = \dfrac{1}{2}$.

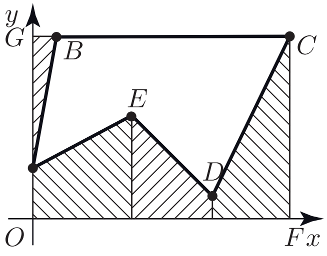


Рис. 13.6

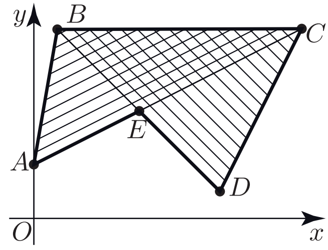


Рис. 13.7

Уравнение прямой BD при помощи координат точек $B(1,7)$ и $D(7,1)$ найдём из системы

$$\begin{cases} 7 = k \cdot 1 + b, \\ 1 = k \cdot 7 + b \end{cases}$$

аналогичным образом. В результате получим $b = 8$, $k = -1$.

Из системы уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 2, \\ y = -x + 8, \end{cases}$$

описывающих прямые AC и BD, найдём интересующие нас координаты точки их пересечения — $E(4,4)$.

Площадь пятиугольника $ABCDE$ можно вычислять разными способами. Например, выбрасывая из прямоугольника $OFCG$ незаштрихованные куски (рис. 13.6) или разбивая его на треугольники (рис. 13.7).

Вычислим искомую площадь посредством треугольников ABC, BCD и BCE, имеющих общую сторону BC, которая к тому же параллельна оси Ox. Для этого достаточно найти длины соответствующих высот и стороны BC. При помощи координатного задания вершин этих треугольников найти эти длины совсем нетрудно. Итак,

длина высоты ABC равна 5,

длина высоты BCD равна 6,

длина высоты BCE равна 3,

длина стороны BC равна 9.

Тем самым, площади треугольников ABC, BCD и BCE равны соответственно

$$\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 5=\frac{45}{2}\,,\quad \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 6=\frac{54}{2}\,,\quad \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3=\frac{27}{2}\,.$$

Заметим, что для треугольников ABC и BCD треугольник BCE является общим и тем самым вносит свой (один и тот же) вклад в площадь каждого из них. Поэтому, складывая площади треугольников ABC и BCD, мы будем дважды учитывать площадь треугольника BCE. Значит, для того чтобы получить правильный ответ, нужно сложить первые два числа и вычесть третье.

Таким образом, искомая площадь равна

$$\frac{45}{2}+\frac{54}{2}-\frac{27}{2}=\frac{45+54-27}{2}=\frac{72}{2}=36.$$

Ответ: 36.

Задача 3 (геологический факультет МГУ, 1981). Найдите площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости условием

$$|x|+|y-1|\leqslant 4.$$

Решение: В этой задаче также нужно начать с выяснения, что именно скрывается за заданным неравенством и о какой фигуре идёт речь.

Чтобы облегчить поиск ответа на этот вопрос, стоит ввести новую неизвестную величину

$$z=y-1.$$

Это позволит записать исходное неравенство следующим образом

$$|x|+|z|\leqslant 4.$$

Из того, что неизвестные x и z входят в полученное неравенство под знаком модуля, вытекает, что если точка плоскости Oxz с координатами $(x_\circ,z_\circ)$ принадлежит фигуре, описываемой этим неравенством, то и точки с координатами $(-x_\circ,z_\circ)$, $(-x_\circ,-z_\circ)$ и $(x_\circ,-z_\circ)$ также будут ей принадлежать. Иными словами, искомая фигура имеет две оси симметрии — ось Ox и ось Oz.

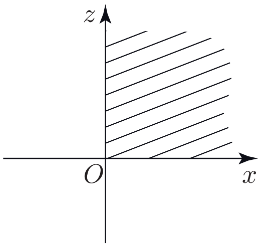


Рис. 13.8

Это означает, что при поиске решения задачи достаточно ограничиться подробным разбором случая $x \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, т. е. первой четвертью (рис. 13.8), где неравенство принимает следующий вид

$$x + z \leqslant 4.$$

Для того чтобы описать множество точек, координаты x и z которых удовлетворяют этому неравенству, рассмотрим сначала случай равенства

$$x + z = 4.$$

Это уравнение описывает прямую, которую легко построить по точкам её пересечения с координатными осями — это точки (4, 0) и (0, 4) (рис. 13.9).

Построенная прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, одну из которых описывает интересующее нас неравенство. Для того чтобы определить, какую именно из полуплоскостей оно описывает, нужно выбрать точку, про которую заведомо известно, в какой из полуплоскостей она лежит, и подставить её координаты в неравенство вместо неизвестных x и z.

Удобнее всего взять точку $O(0,0)$ (рис. 13.10). Имеем

$$0 + 0 < 4.$$

Полученное верное неравенство означает, что точка $O(0,0)$ лежит в той полуплоскости, которая нас интересует. На рисунке 13.10 она заштрихована.

Объединяя рисунки 13.8 и 13.10, получаем прямоугольный треугольник (рис. 13.11), который с учётом симметрии есте-

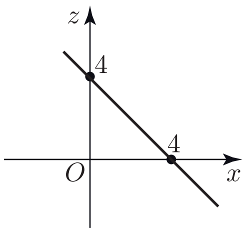


Рис. 13.9

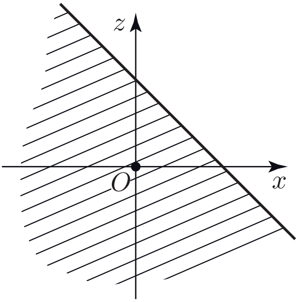


Рис. 13.10

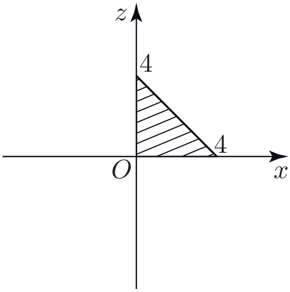


Рис. 13.11

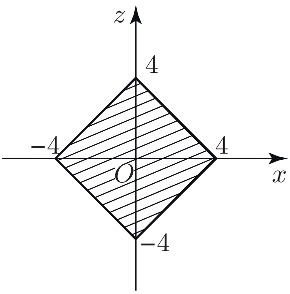


Рис. 13.12

ственно дополняется до квадрата (рис. 13.12) с диагональю 8 (рис. 13.12). Его площадь равна 32.

Ответ: 32.

Задача 4 (экономический факультет МГУ, 1988). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$\left|y+\frac{1}{2}\,x^2\right|+\left|y-\frac{1}{2}\,x^2\right|\leqslant 2+x.$$

Решение: Искомая фигура симметрична относительно оси Ox, ибо совсем нетрудно проверить, что если точка с координатами $(x_\circ, y_\circ)$ принадлежит этой фигуре, то и точка с координатами $(x_\circ, -y_\circ)$ также ей принадлежит.

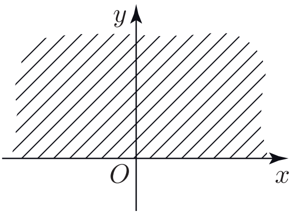


Рис. 13.13

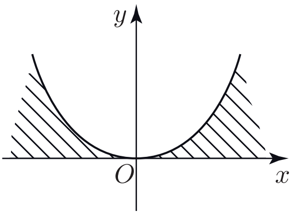


Рис. 13.14

Это наблюдение позволяет нам ограничиться подробным рассмотрением случая $y \geqslant 0$, т. е. верхней полуплоскостью (рис. 13.13).

Перепишем заданное неравенство с учётом сделанного допущения. Имеем

$$y + \frac{1}{2}\,x^2 + \left|y - \frac{1}{2}\,x^2\right| \leqslant 2 + x.$$

В зависимости от знака выражения, охваченного знаками модуля, возможны ровно два случая:

$$1)\quad y - \frac{1}{2}\,x^2 \leqslant 0,$$

$$2)\quad y - \frac{1}{2}x^2 > 0.$$

Случай 1-й: . Заданное неравенство принимает вид

$$x^2 \leqslant 2 + x,$$

а выписанное условие 1) означает, что интересующие нас точки должны лежать под параболой

$$y = \frac{1}{2}\,x^2$$

(рис. 13.14).

Решение полученного неравенства можно записать так

$$-1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Соответствующее множество точек на плоскости Oxy изображено на рис. 13.15 (отмеченные в нём точки A и B имеют координаты $(-1{,}1/2)$ и $(2{,}2)$ соответственно).

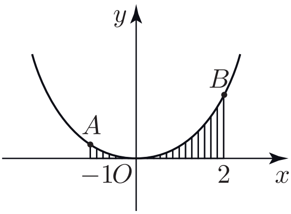


Рис. 13.15

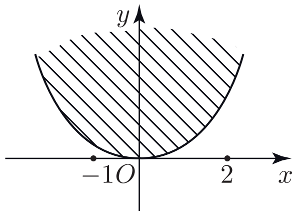


Рис. 13.16

Случай 2-й: . Заданное неравенство принимает вид

$$2y \leqslant 2 + x.$$

а выписанное условие 2) означает, что интересующие нас точки должны лежать над параболой

$$y = \frac{1}{2}\,x^2$$

(рис. 13.16).

Неравенство

$$y \leqslant \frac{1}{2}\,x + 1$$

описывает точки одной из полуплоскостей, на которые прямая

$$y = \frac{1}{2}\,x + 1$$

разбивает плоскость Oxy. Нетрудно проверить, что это полуплоскость, заштрихованная на рис. 13.17.

Прямая, заданная уравнением

$$y = \frac{1}{2}\,x + 1,$$

пересекает параболу в двух точках — это точки $A(-1{,}1/2)$ и $B(2{,}2)$ (рис. 13.18).

Осталось объединить рис. 13.15 и 13.18 (см. рис. 13.19) и воспользоваться свойством симметрии (рис. 13.20).

Площадь равнобочной трапеции, полученной в результате этих действий, равна

$$\frac{1}{2} \cdot (1 + 4) \cdot 3 = \frac{15}{2}\,.$$

Ответ: 15/2.

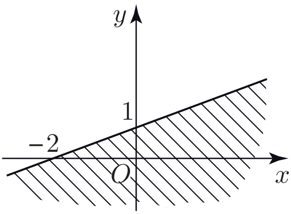


Рис. 13.17

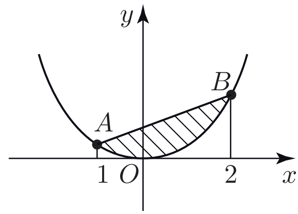


Рис. 13.18

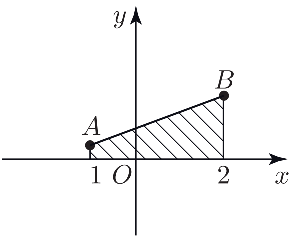


Рис. 13.19

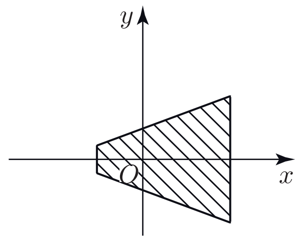


Рис. 13.20

Задача 5 (факультет государственного управления МГУ, 2002): Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (3\sqrt{x|x|} + |y| - 3)(|x| + 3|y| - 9) = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Решение: Обратимся сначала к первому из уравнений системы. Выражение, стоящее под знаком квадратного корня, неотрицательно, $x|x| \geqslant 0$. Отсюда в силу неотрицательности $|x|$ вытекает, что и $x \geqslant 0$.

Это позволяет записать первое уравнение в более простом виде

$$(3x + |y| - 3)(x + 3|y| - 9) = 0.$$

Заметим теперь, что множество точек, координаты которых связаны условиями задачи симметрично относительно оси Oy: если точка с координатами $(x_\circ, y_\circ)$ принадлежит этому множеству, то и точка с координатами $(x_\circ, -y_\circ)$ также ему принадлежит.

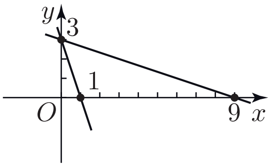


Рис. 13.21

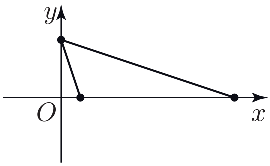


Рис. 13.22

Это наблюдение позволяет нам ограничиться подробным рассмотрением случая $y \geqslant 0$. Тем самым, первое уравнение системы можно записать так

$$(3x + y - 3)(x + 3y - 9) = 0, \quad y \geqslant 0.$$

Из того, что произведение равно нулю лишь в тогда, когда нулю равен хотя бы один из его сомножителей, получаем, что последнее равенство выполняется лишь в двух случаях:
либо

$$3x + y - 3 = 0,$$

либо

$$x + 3y - 9 = 0.$$

Каждое из этих уравнений описывает прямую: первая проходит через точки (1,0) и (0,3), вторая — через точки (9, 0) и (0, 3) (рис. 13.21).

В силу условий, которым подчиняются переменные x и y,

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0,$$

получаем два отрезка в первой четверти (рис. 13.22), а с учётом симметрии и более сложную фигуру — невыпуклый четырёхугольник $EFGH$ с вершинами $E(0,3)$, $F(9,0)$, $G(0,-3)$ и $H(1,0)$ (рис. 13.23).

Перейдём теперь ко второму уравнению исходной системы

$$(x - a)^2 + y^2 = 25.$$

Для того чтобы выяснить, какое множество точек оно описывает, сделаем небольшое отступление.

Рассмотрим на плоскости Oxy две точки $A(a,0)$ и $M(x,y)$ (рис. 13.24) и вычислим расстояние между ними. Опустив из точки M перпендикуляр на ось Ox, получим треугольник

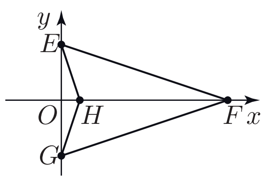


Рис. 13.23

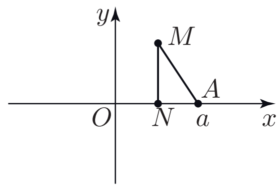


Рис. 13.24

AMN, длины катетов которого равны $|x-a|$ и $|y|$ соответственно.

Вычислим длину его гипотенузы. Она равна

$$\sqrt{|x-a|^2+|y|^2}=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Приравняем найденное выражение к 5 и возведём в квадрат обе части

$$(x-a)^2+y^2=25.$$

Полученное равенство описывает все точки $M(x,y)$ плоскости Oxy, отстоящие от точки $A(a,0)$ на расстоянии 5. Здесь уместно вспомнить определение окружности как *совокупности всех точек плоскости, находящихся на одном и том же положительном расстоянии от фиксированной точки этой плоскости.* Значит, последнее уравнение описывает окружность! Центр этой окружности совпадает с точкой $A(a,0)$, а её радиус равен 5 (рис. 13.25).

Итак, первое уравнение заданной системы описывает невыпуклый четырёхугольник, симметричный относительно оси абсцисс, а второе — окружность фиксированного радиуса с центром на этой оси, положение которого меняется вместе с изменением значения параметра.

Наша задача — указать все значения параметра, при которых заданная система имеет ровно три решения или, говоря немного иначе, описанные фигуры имеют ровно три общие точки.

На параметр a нет никаких ограничений, и для того чтобы не упустить ни одного из интересующих нас значений, рассмотрим все его значения последовательно.

Заметим прежде всего, что при изменении параметра a от $-\infty$ до $+\infty$ окружность как бы прокатывается вдоль всей оси

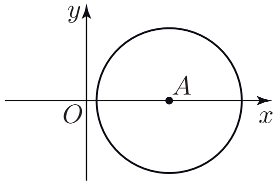


Рис. 13.25

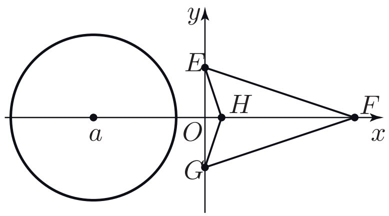


Рис. 13.26

Ox, в то время как четырёхугольник лежит в правой полуплоскости относительно оси Oy. Поэтому при любом значении параметра, подчинённого условию $a < -5$, эти фигуры вообще не имеют общих точек (рис. 13.26).

Увеличивая a и тем самым перемещая окружность вдоль оси Ox вправо, мы получим, что при некотором отрицательном значении параметра a на этой окружности окажется либо точка $H(1{,}0)$, либо пара точек $E(0{,}3)$ и $G(0,-3)$.

Точка $H(1{,}0)$ окажется на окружности при условии

$$(1-a)^2 + 0^2 = 25,$$

т. е. при $a = -4$ (второе решение этого уравнения $a = 6$), а пара точек $E(0{,}3)$ и $G(0,-3)$ окажется на окружности при условии

$$(0-a)^2 + (\pm 3)^2 = 25,$$

т. е. при $a = -4$ (второе решение этого уравнения $a = 4$).

Сравнивая выписанные значения параметра, можно заметить, что при $a = -4$ на окружности будут лежать все три точки $H(1{,}0)$, $E(0{,}3)$ и $G(0,-3)$ и только они (рис. 13.27).

При дальнейшем перемещении окружности вправо число точек четырёхугольника $EFGH$, попадающих на неё, будет равно двум (рис. 13.28) до тех пор, пока на окружность не попадёт точка $F(9{,}0)$. Это случится при значении a, подчиняющемся условию

$$(9-a)^2 + 0^2 = 25,$$

т. е. при $a = 4$ (второе решение этого уравнения $a = 14$).

Сравнивая выписанные значения параметра, можно заметить, что при $a = 4$ на окружности будут лежать три точки $F(9{,}0)$, $E(0{,}3)$ и $G(0,-3)$ четырёхугольника $EFGH$ и только они (рис. 13.29).

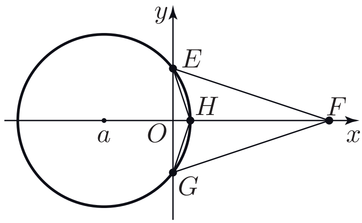


Рис. 13.27

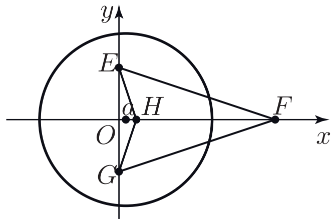


Рис. 13.28

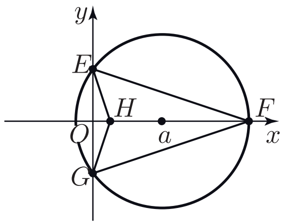


Рис. 13.29

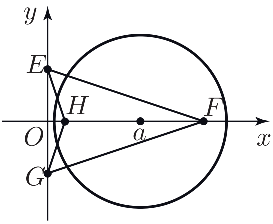


Рис. 13.30

Перемещая окружность вправо, легко заметить, что число точек четырёхугольника $EFGH$, общих с окружностью, будет равно четырём (рис. 13.30) до тех пор, пока на окружности не окажется точка $H(1{,}0)$. Это случится при значении a, подчиняющемся условию

$$(1-a)^2 + 0^2 = 25,$$

т. е. при $a = 6$ (второе решение этого уравнения $a = -4$ мы ранее уже использовали). При $a = 6$ на окружности будут лежать ровно три точки четырёхугольника $EFGH$ (рис. 13.31).

При $a > 6$ число общих точек рассматриваемых фигур будет равно сначала двум (при $6 < a < 14$) (рис. 13.32), затем единице (при $a = 14$) (рис. 13.33) и нулю (при $a > 14$) (рис. 13.34).

Ответ: -4, 4, 6.

Замечание 1. Предложенную задачу можно решать и алгебраическим методом (разумеется, с потерей наглядности).

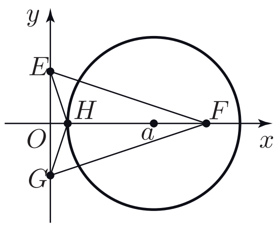


Рис. 13.31

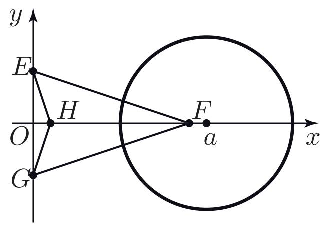


Рис. 13.32

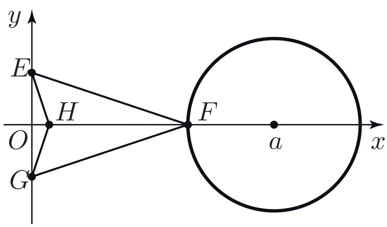


Рис. 13.33

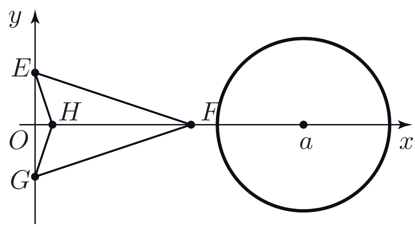
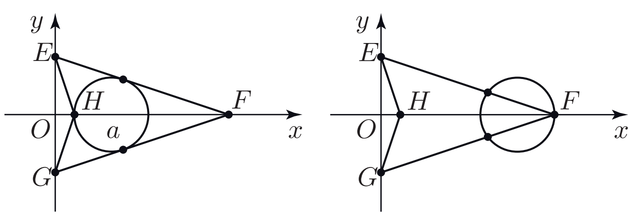


Рис. 13.34



а **б**

Рис. 13.35

Замечание 2. Полученный результат зависит от радиуса окружности. В частности, при некоторых значениях радиуса (меньших 5) окружность может быть расположена так, как это показано на рис. 13.35.

Замечание 3. . Если $M_\circ(x_\circ, y_\circ)$ — центр окружности и R — радиус, то её уравнение можно записать так

$$(x - x_\circ)^2 + (y - y_\circ)^2 = R^2.$$

Глава 14

ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Задачи по планиметрии имеют ряд характерных черт, одна из которых проявляется наиболее ярко. Это *чертёж*.

Чертёж является естественной составляющей каждой планиметрической задачи. Именно через чертёж (а чаще через серию чертежей) приходит осмысление геометрической задачи, проявляется общая картина, позволяющая лучше понять совокупность заданных условий (то, что дано) и ясно увидеть, что именно требуется найти (путём рассуждений и вычислений). Удачно сделанный (не обязательно с первой же попытки) чертёж немало способствует успеху в отыскании последовательности действий, приводящих к верному ответу.

Ввиду той особой роли, которую чертёж играет при решении геометрической задачи, к нему предъявляются и особые требования: чертёж должен быть ясным, аккуратным и относительно большим (так как по ходу решения задачи вглядываться в него приходится неоднократно).

Впрочем, чертёж может быть и коварен. Иногда решающий геометрическую задачу попадает как бы в плен чертежу. Ему начинает казаться, что угол, под которым на чертеже пересекаются отрезки, прямой. И он начинает считать его прямым, хотя на самом деле угол лишь близок к прямому. Или ему вдруг начинает казаться, что треугольник, заданный в условии, является равнобедренным просто потому, что равнобедренным оказался треугольник на чертеже.

Чтобы обезопасить себя от подобных случайностей, полезно время от времени перерисовывать чертёж, по возможности не глядя на предыдущие чертежи. Это помогает ещё и в осмыслении условий задачи.

Конечно, чертёж является наглядным носителем условий задачи, но не стоит забывать, что другой абитуриент, решая ту же задачу, воспользуется своим чертежом, который далеко не во всём будет совпадать с вашим, но извлекаемые из него сведения, необходимые для решения поставленной задачи, будут те же.

Геометрическая задача допускает к себе не сразу, и порой приходится рисовать несколько чертежей, прежде чем появится нужное понимание задачи. Нередко необходимую ясность вносят дополнительные построения и дополнительные вычисления, обнажающие невидимые сразу метрические свойства рассматриваемой геометрической фигуры.

Планиметрические задачи редко бывают похожи. Поэтому мы не сможем описать всё многообразие типов таких задач, даже ограничившись самими простыми фигурами (прямоугольными и правильными треугольниками, окружностями и вписанными в них углами, параллелограммами и трапециями) и самыми простыми понятиями и фактами (симметрией, подобием, известными теоремами — теоремой Пифагора, теоремой синусов и теоремой косинусов).

Наша цель — показать (на примере нескольких задач), как именно следует подходить к каждой конкретной геометрической задаче с тем, чтобы понять её условие и, действуя шаг за шагом, выйти на правильный ответ.

Начнём с задач, в условиях которых речь идёт о простейших геометрических фигурах — прямоугольных треугольниках.

Задача 1. (факультет государственного управления МГУ, 2003). В прямоугольном треугольнике KLM проведён отрезок MD, соединяющий вершину прямого угла с точкой D на гипотенузе KL так, что длины отрезков DL, DM и DK различны и образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{2}$, причём $DL = 1$. Найдите величину угла KMD.

Решение: Основные события в задаче разворачиваются вокруг прямоугольного треугольника KLM. Построим его,

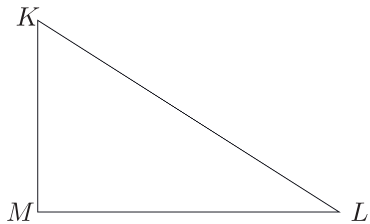


Рис. 14.1

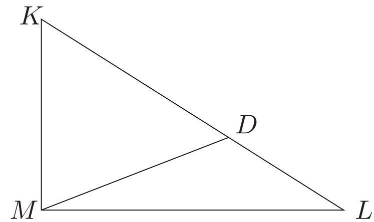


Рис. 14.2

предварительно заметив, что точка M — вершина прямого угла (рис. 14.1). Выберем на гипотенузе KL точку D и соединим её с вершиной M (рис. 14.2).

В условии задачи сказано, что длины отрезков DL, DM и DK в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt{2}$, причём $DL = 1$. Отсюда легко следует, что

$$DM = DL \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}, \quad DK = DM \cdot \sqrt{2} = 2.$$

Так как

$$DL + DK = KL,$$

то тем самым мы можем найти длину гипотенузы KL. Она равна 3.

Но обратимся к последнему чертежу (рис. 14.2). Сразу же бросается в глаза, что построенный нами чертёж не вполне согласуется с заданными числовыми значениями. В этом ничего страшного нет — мы строим прямоугольный треугольник для того, чтобы *увидеть*, что именно нам уже известно и что именно нам нужно найти. (Воплощать в чертеже точные значения известных величин вовсе не обязательно, ведь мы же решаем не задачу на построение.)

Построенный (вспомогательный) чертёж и показывает это: нам известны длины отрезков DL, DM и DK и требуется найти величину угла $\angle KMD$ (рис. 14.3).

Проведём некоторые дополнительные построения, а именно, опустим из точки D перпендикуляры DA и DB на катеты MK и ML соответственно (рис. 14.4).

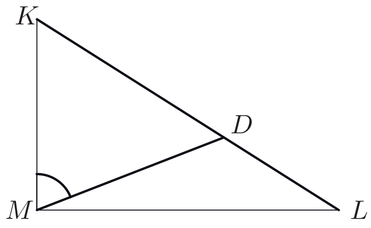


Рис. 14.3

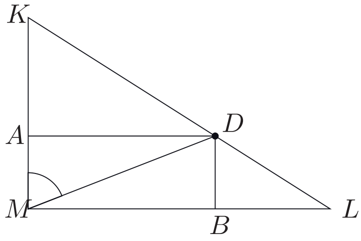


Рис. 14.4

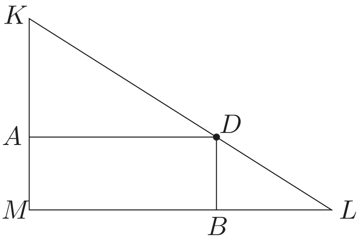


Рис. 14.5

Обозначим через x величину искомого угла $\angle KMD$ и, считая её известной, найдём из прямоугольного треугольника ADM длины отрезков AD и AM. Имеем

$$AD = MD \cdot \sin x = \sqrt{2}\sin x, \quad AM = MD \cdot \cos x = \sqrt{2}\cos x.$$

Стоит отметить, что мы пока ещё не воспользовались тем, что заданный треугольник прямоугольный.

Сделаем ещё один чертёж (рис. 14.5). На нём можно видеть три прямоугольных треугольника — ΔAKD, ΔBDL и ΔMKL. Они подобны (их острые углы соответственно равны).

Напомним, что в подобных треугольниках соответствующие стороны пропорциональны. Это позволит нам выразить длины катетов заданного треугольника MKL через известные длины и искомый угол $\angle KMD$.

Рассмотрим сначала пару подобных треугольников — ΔBDL и ΔMKL. Так как длина гипотенузы DL треугольника ΔBDL в три раза меньше длины гипотенузы KL треугольника ΔMKL, то и длина катета DB в три раза меньше длины соответствующего ему катета KM треугольника ΔMKL. С учётом того, что $DB = AM$, получаем отсюда, что

$$KM = 3 \cdot DB = 3\sqrt{2}\cos x.$$

Рассматривая другую пару подобных треугольников — ΔAKD и ΔMKL, с учётом равенства

$$KL = \frac{3}{2}\,KD$$

получаем, что

$$ML = \frac{3}{2}\,AD = \frac{3}{2}\,\sqrt{2}\sin x.$$

Связывая теперь длины катетов KL, ML и гипотенузы KL теоремой Пифагора, приходим к равенству

$$(3\sqrt{2}\cos x)^2 + \left(\frac{3}{2}\,\sqrt{2}\sin x\right)^2 = 3^2.$$

Отсюда следует, что

$$2\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin^2 x = 1.$$

Пользуясь основным тригонометрическим тождеством

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

преобразуем последнее равенство к следующему виду

$$3\cos^2 x = 1.$$

Вследствие того, что искомый угол острый, отсюда находим

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

и

$$x = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Задача 2 (факультет почвоведения МГУ, 1989). В прямоугольном треугольнике ABC длина катета AB равна 4, а длина катета AC равна 3. Точка D делит гипотенузу пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольник ADC и в треугольник ABD.

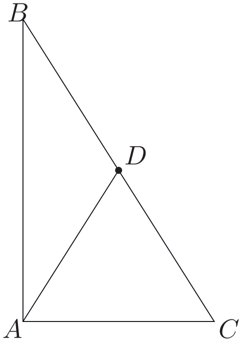


Рис. 14.6

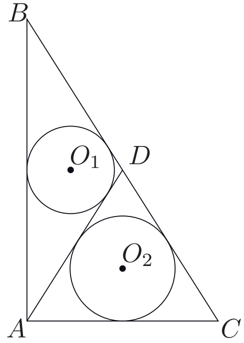


Рис. 14.7

Решение вновь начинаем с построения чертежа — строим прямоугольный треугольник ABC (это так называемый *египетский* треугольник — длины его сторон равны 3, 4 и 5), отмечаем точку D в середине гипотенузы BC и соединяем её с вершиной A прямого угла (рис. 14.6).

Вследствие того, что точка D — середина гипотенузы BC, отрезок (медиана) AD разбивает заданный треугольник ABC на два треугольника ADC и ABD, площади которых равны между собой, и потому каждая из них составляет ровно половину от площади заданного треугольника ABC. В силу того, что последняя равна

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6,$$

заключаем, что площадь каждого из треугольников ADC и ABD равна 3. Кроме того, равны длины отрезков AD, BD и CD (длина медианы, проведённой из вершины прямого угла треугольника, равна половине длины его гипотенузы). А это означает, что треугольники ADC и ABD являются равнобедренными.

Впишем в каждый из треугольников ADC и ABD по окружности (рис. 14.7).

В случае, когда известны длины сторон треугольника и его площадь (у нас именно такой случай), найти их радиусы совсем легко.

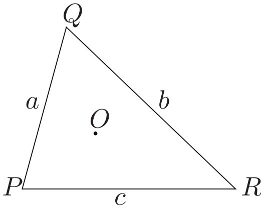


Рис. 14.8

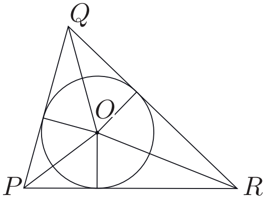


Рис. 14.9

Рассмотрим небольшую вспомогательную задачу, показывающую, как вычислить радиус окружности, вписанной в треугольник, если известны длины его сторон и его площадь. Обратимся к рис. 14.8, на котором изображён треугольник PQR площади S со сторонами длиной a, b и c.

Соединим центр O окружности, вписанной в треугольник PQR с его вершинами P, Q и R (рис. 14.9). В результате получим три треугольника – ΔPQO, ΔQRO и ΔRPO.

Длины высот этих треугольников, опущенных из их общей вершины O, равны радиусу окружности, вписанной в треугольник PQR. Обозначим его через r и вычислим площадь каждого из треугольников ΔPQO, ΔQRO и ΔRPO. Имеем соответственно

$$\frac{1}{2}\,ar, \quad \frac{1}{2}\,br, \quad \frac{1}{2}\,cr.$$

Ясно, что сумма площадей этих треугольников совпадает с площадью S треугольника PQR:

$$\frac{1}{2}\,(a+b+c)r = S.$$

Отсюда

$$r = \frac{2S}{a+b+c}\,.$$

Вернёмся теперь к исходной задаче.

Пользуясь только что выведенной формулой, вычислим радиусы r_1 и r_2 окружностей, вписанных в треугольники ABD и ADC, и получим соответственно

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+4\right)r_1 = 3, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}+3\right)r_2 = 3.$$

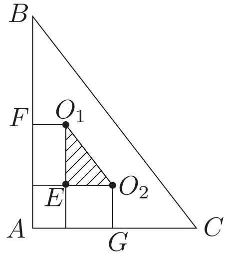


Рис. 14.10

Отсюда

$$r_1 = \frac{2}{3}, \quad r_2 = \frac{3}{4}.$$

Соединим центры O_1 и O_2 окружностей, вписанных в треугольники ABD и ADC, и опустим из них перпендикуляры на оба катета треугольника ABC (рис. 14.10).

Основание F перпендикуляра O_1F совпадёт с серединой катета AB, а основание G перпендикуляра O_2G — с серединой катета AC.

Это позволит легко найти длины катетов заштрихованного на рис. 14.10 прямоугольного треугольника O_1O_2E. Имеем

$$EO_1 = \frac{1}{2}\,AB - r_2 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

и

$$EO_2 = \frac{1}{2}\,AC - r_1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

Длина гипотенузы O_1O_2 равна искомому расстоянию между центрами вписанных окружностей. Воспользовавшись теоремой Пифагора, получаем, что

$$(O_1O_2)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{13}{4 \cdot 9}.$$

Ответ: $\frac{5}{12}\sqrt{13}$.

Задача 3 (черноморский филиал МГУ (г. Севастополь), 1999). В треугольнике ABC со сторонами $AB = \sqrt{3}$, $BC = 2$, $AC = \sqrt{7}$ проведена медиана BD. В треугольники ABD и DBC вписаны окружности, которые касаются BD в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка MN.

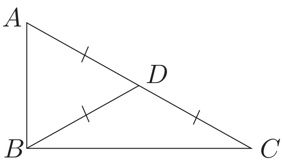


Рис. 14.11

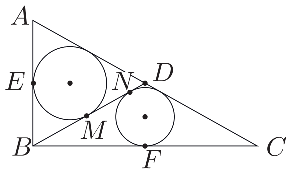


Рис. 14.12

Решение: Прежде всего попробуем познакомиться с треугольником ABC поближе. Он задан своими сторонами и, следовательно, полностью определён. Это означает, что в этом треугольнике мы можем найти любой элемент.

В частности, можно выяснить, какой это треугольник — остроугольный, тупоугольный или прямоугольный. Для этого достаточно воспользоваться теоремой Пифагора: если сумма квадратов длин двух меньших сторон окажется больше квадрата третьей, большей стороны, то треугольник — остроугольный, если окажется меньше — тупоугольный, в случае равенства треугольник является прямоугольным.

Легко убедиться в том, что в нашем случае

$$(\sqrt{3})^2 + 2^2 = (\sqrt{7})^2.$$

Тем самым, заданный треугольник ABC является прямоугольным и AC — его гипотенуза.

Это наблюдение сразу многое облегчает.

Чтобы в этом разобраться получше, сделаем чертёж (рис. 14.11).

Треугольники ABD и DBC являются равнобедренными: длины сторон AD, BD и CD равны вследствие того, что середина D гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC совпадает с центром описанной вокруг него окружности. Впишем в каждый из них по окружности (рис. 14.12).

Нам нужно найти расстояние между точками M и N, в которых окружности, вписанные в треугольники ABD и DBC, касаются медианы BD.

Здесь самое время вспомнить о том, что отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, имеют равные длины (рис. 14.13).

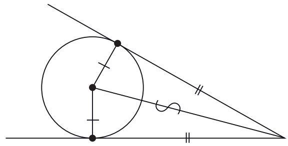


Рис. 14.13

Тем самым,

$$BE = BM, \quad BF = BN.$$

Вследствие того, что точка E делит катет AB пополам, заключаем, что

$$BE = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

а из того, что точка F делит пополам катет BC, получаем, что

$$BF = 1.$$

Отсюда вытекает, что

$$MN = BN - BM = BF - BE = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $1 - \sqrt{3}/2$.

Задача 4 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 2003). Высота правильного треугольника ABC со стороной 1 совпадает с одной из сторон прямоугольного треугольника DEF, углы которого составляют арифметическую прогрессию. При каком взаимном расположении треугольников ABC и DEF площадь их общей части окажется наименьшей? Найдите эту площадь.

Решение: В этой задаче важно рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения треугольников, не упустив ни одного. Необходимые вычисления очень простые.

В условии задачи фигурируют два треугольника — правильный треугольник ABC со стороной 1 и прямоугольный треугольник DEF, углы которого образуют арифметическую прогрессию.

Про первый треугольник нам известно всё — стороны (их длины равны 1), углы (величина каждого из них равна 60°) и площадь. Последняя равна

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

Про второй треугольник известно меньше. Попробуем однако разобраться со всеми его углами.

Для того чтобы описать арифметическую прогрессию, нужно знать её первый член a и разность d. Тогда первые три члена этой прогрессии будут выглядеть следующим образом

$$a,\quad a+d,\quad a+2d.$$

По условию задачи именно так и связаны между собой углы прямоугольного треугольника DEF.

Теперь вспомним, что сумма всех углов любого треугольника равна развёрнутому. В нашем случае это можно записать посредством равенства

$$a+(a+d)+(a+2d)=180^\circ,$$

или, что то же,

$$3(a+d)=180^\circ.$$

Отсюда легко находим второй член прогрессии

$$a+d=60^\circ,$$

а так как третий (самый большой) по условию равен 90°, то все углы треугольника DEF становятся нам известны:

$$\angle D=30^\circ,\quad \angle E=60^\circ,\quad \angle F=90^\circ.$$

Что касается метрических данных в треугольнике DEF, то всё зависит от взаимного расположения треугольников: с высотой BH правильного треугольника ABC может совпадать любая из сторон треугольника DEF — это может быть его гипотенуза DE, бо́льший катет DF или меньший катет EF.

Всего с учётом симметрии возможно шесть случаев взаимного расположения треугольников. На рис. 14.14 общая часть треугольников ABC и DEF заштрихована.

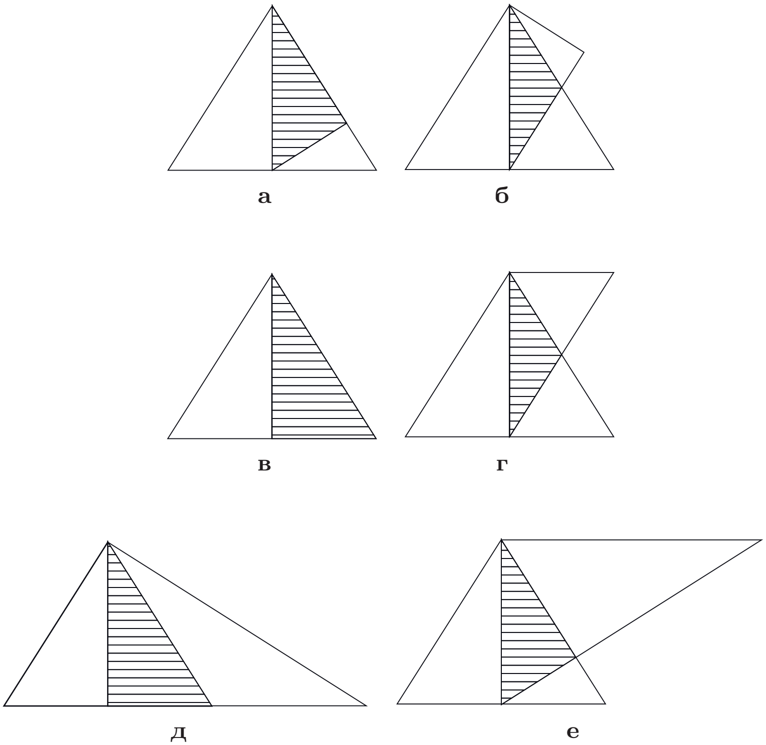


Рис. 14.14

Во всех шести случаях правильный треугольник ABC один и тот же. Что же до прямоугольного треугольника DEF, то его размеры зависят от его расположения относительно треугольника ABC.

Прежде всего заметим, что в ситуациях, изображённых на рис. 14.14в и 14.14д, площадь заштрихованной части ровно в два раза меньше площади треугольника ABC и, значит, равна

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Обратимся к ситуациям, изображённым на рис. 14.14а и 14.14е. В обоих случаях общая часть треугольников ABC и DEF представляет собой прямоугольный треугольник с острыми углами 30° и 60°, длина гипотенузы которого равна $\sqrt{3}/2$. Это позволяет без труда вычислить его площадь:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 30^\circ\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 30^\circ\right)= \\ =\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{32}\,.$$

В оставшихся ситуациях, изображённых на рис. 14.14б и 14.14г, общая часть представляет собой равнобедренный треугольник с острыми углами 30° при основании, длина которого равна $\sqrt{3}/2$. Это позволяет легко вычислить его площадь:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{16}\,.$$

Сравним все три найденные величины. Имеем

$$\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{4\sqrt{3}}{32}>\frac{3\sqrt{3}}{32}>\frac{2\sqrt{3}}{32}=\frac{\sqrt{3}}{16}\,.$$

Отсюда вытекает, что минимальная площадь общей части треугольников ABC и DEF равна

$$\frac{\sqrt{3}}{16}$$

и реализуется в случаях 14.14б и 14.14г их взаимного расположения.

Ответ: $\sqrt{3}/16$.

Замечание. Возможны и другие расположения треугольников (рис. 14.15), но, как нетрудно видеть, ничего принципиально нового в рассмотренную нами картину они не добавляют.

Перейдём к фигурам, вписанным в окружность. Хорошо известно, что в окружность можно вписать любой треугольник. А вот для четырёхугольника это уже не так.

Задача 5 (факультет государственного управления МГУ, 2004). Длины трёх сторон четырёхугольника, вписанного в окружность радиуса $2\sqrt{2}$, одинаковы и равны 2. Найдите длину четвёртой стороны.

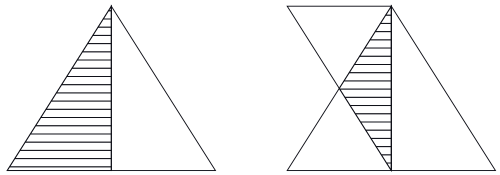


Рис. 14.15

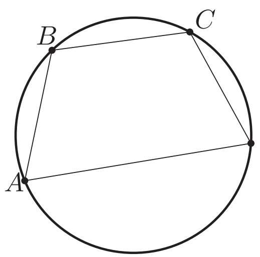


Рис. 14.16

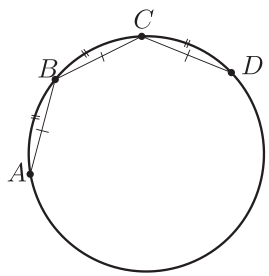


Рис. 14.17

Решение задачи начнём с того, что нарисуем окружность, впишем в неё четырёхугольник $ABCD$ (рис. 14.16) и постараемся выяснить, что именно скрывается за равенством длин его сторон AB, BC и CD.

Стороны AB, BC и CD являются хордами окружности, описанной вокруг четырёхугольника $ABCD$, и вследствие равенства их длин стягивают её равные дуги (рис. 14.17). Это означает, что углы, вписанные в эту окружность и опирающиеся на эти дуги равны.

Соединим противоположные вершины четырёхугольника $ABCD$ диагоналями AC и BD (рис. 14.18). Углы $\angle ADB$ и $\angle DBC$ опираются на равные дуги и, следовательно, равны,

$$\angle ADB = \angle DBC.$$

Отсюда вытекает, что стороны BC и AD четырёхугольника $ABCD$ лежат на параллельных прямых (равные углы $\angle ADB$ и $\angle DBC$ являются внутренними накрестлежащими для этих прямых).

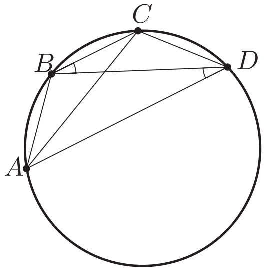


Рис. 14.18

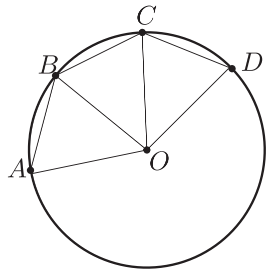


Рис. 14.19

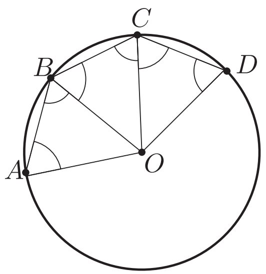


Рис. 14.20

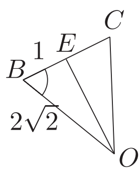


Рис. 14.21

Тем самым, четырёхугольник $ABCD$ — трапеция, причём трапеция равнобочная.

Соединим центр O описанной окружности со всеми вершинами четырёхугольника $ABCD$ (рис. 14.19) и рассмотрим треугольники OAB, OBC и OCD. Они равны (по трём сторонам). Значит, равны и все углы при их основаниях (рис. 14.20).

Обозначим общую величину этих углов через x и рассмотрим один из этих треугольников; например, треугольник OBC (рис. 14.21).

Перпендикуляр, опущенный из точки O на основание BC, делит его пополам. Из треугольника OBE находим косинус интересующего нас угла

$$\cos x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

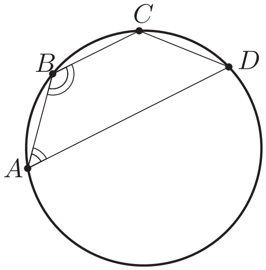


Рис. 14.22

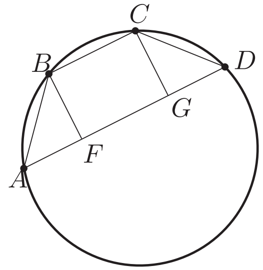


Рис. 14.23

Угол при вершине B четырёхугольника $ABCD$ в два раза больше, и потому косинус этого угла равен

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = -\,\frac{3}{4}\,.$$

Обратимся к рис. 14.22. На нём отмечены внутренние односторонние углы $\angle A$ и $\angle B$, сумма которых в силу параллельности сторон AD и BC, равна 180°. Тем самым,

$$\cos\angle A = -\cos\angle B = -\cos 2x = \frac{3}{4}\,.$$

Опустим теперь на большее основание AD трапеции $ABCD$ перпендикуляры BF и CG (рис. 14.23) и заметим, что

$$AD = AF + FG + GD, \quad GD = AF, \quad FG = BC.$$

Из треугольника ABF находим

$$AF = AB\cdot\cos\angle A = 2\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

и в результате получаем, что

$$AD = \frac{3}{2} + 2 + \frac{3}{2} = 5.$$

Ответ: 5.

Задача 6 (экономический факультет МГУ, отделение экономики, 2003). Площадь четырёхугольника $PQRS$ равна 48. Известно, что $PQ = QR = 6$, $RS = SP$ и ровно три вершины P, Q и R лежат на окружности радиуса 5. Найдите длины сторон RS и SP.

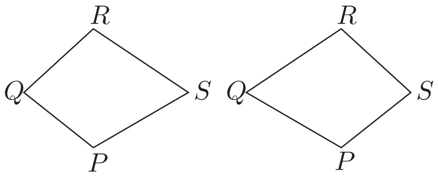


Рис. 14.24

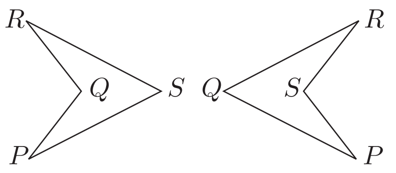
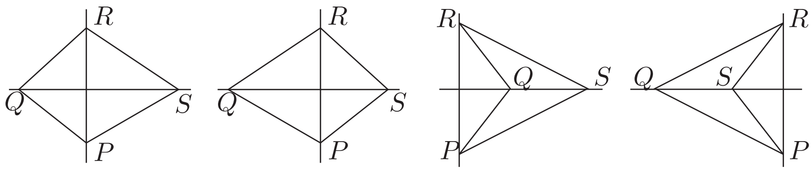


Рис. 14.25



а **б**

Рис. 14.26

Решение: Эта задача немного потрудней задачи 5, но в ней также сначала нужно разобраться, с каким четырёхугольником мы имеем здесь дело.

Из того, что в четырёхугольнике $PQRS$ две пары сторон с общей вершиной равны, $PQ = QR$ и $RS = SP$, вытекает, что этот четырёхугольник может выглядеть либо так, как показано на рис. 14.24, либо так, как показано на рис. 14.25.

Дело в том, что длина сторон RS и SP нам пока неизвестна, и она может оказаться либо больше длины сторон PQ и QR, либо меньше (это зависит от конкретных данных задачи). Но в любом случае четырёхугольник $PQRS$ имеет ось симметрии, которая проходит через точки Q и S (рис. 14.26). Эта ось пересекает отрезок PR под прямым углом и делит его пополам. Кроме того, именно на оси симметрии лежит центр O окружности радиуса 5, которой принадлежат точки P, Q и R.

Построим эту окружность для обоих случаев: и для случая, когда точки Q и S лежат по разные стороны от прямой PR, и для случая, когда прямая PR их не разделяет (рис. 14.27).

Ось симметрии пересекает построенную окружность в двух диаметрально противоположных точках, одна из которых это

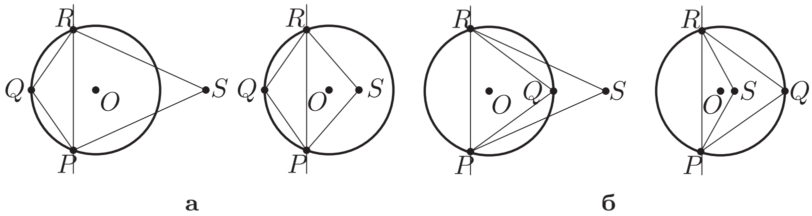


Рис. 14.27

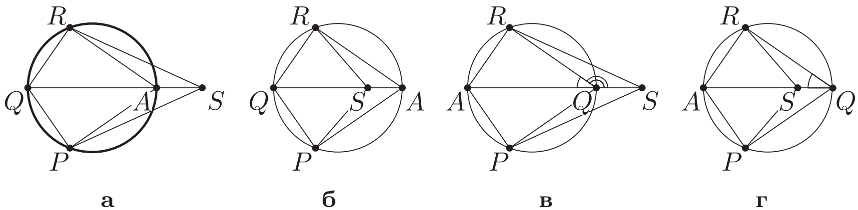


Рис. 14.28

точка Q. Обозначим вторую точку через A и соединим её с точками P и R (рис. 14.28).

Мы получили два равных прямоугольных треугольника PQA и RQA. Их общая гипотенуза QA (диаметр построенной окружности) имеет длину, равную 10. Длина одного из катетов известна по условию (равна 6). Длина другого легко вычисляется и равна 8. Это позволяет найти синус угла $\angle RQA$,

$$\sin\angle RQA = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}\,.$$

Рассмотрим четырёхугольник $PQRA$. Его площадь равна сумме площадей равных треугольников PQA и RQA,

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 48.$$

Вспомним, что по условию задачи этому же числу 48 равна площадь заданного четырёхугольника $PQRS$.

Сравнивая четырёхугольники $PQRS$ и $PQRA$ на рис. 14.28а и 14.28б, видим, что при таком расположении точки S площадь четырёхугольника $PQRS$ либо больше 48 (рис. 14.28а), либо меньше (рис. 14.28б). Так как по условию задачи точка S на построенной окружности лежать не должна (т. е. совпасть с точкой A она никак не может), то при этих числовых данных случай, когда точки Q и S лежат по разные стороны от прямой PR, невозможен.

На основании проведённых рассуждений мы приходим к следующему важному выводу: четырёхугольник $PQRS$ не может быть выпуклым (см. рис. 14.28в и 14.28г).

Подсчитаем площадь невыпуклого четырёхугольника $PQRS$, заметив, что в обоих оставшихся случаях

$$\sin\angle RQS = \sin\angle RQA = \frac{4}{5}\,.$$

Она равна

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot QS\cdot PR\cdot\sin\angle RQS = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot QS\cdot 6\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{5}\cdot QS$$

и 48 (по условию).

Отсюда

$$QS = 10.$$

Полученный результат сужает возможные случаи до одного (рис. 14.28в) — если точка S лежит внутри окружности, то длина отрезка QS должна быть меньше длины диаметра окружности, которая равна 10.

Чтобы найти длину сторон PS и RS, обратимся к треугольнику QRS (рис. 14.29) и воспользуемся теоремой косинусов,

$$RS^2 = QR^2 + QS^2 - 2\cdot QR\cdot QS\cdot\cos\angle RQS.$$

Подставим в выписанную формулу числовые данные, заметив предварительно, что

$$\cos\angle RQS = -\frac{3}{5}\,.$$

Имеем

$$RS^2 = 6^2 + 10^2 + 2\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{3}{5} = 208.$$

Отсюда

$$RS = PS = 4\sqrt{13}.$$

Ответ: $4\sqrt{13}$.

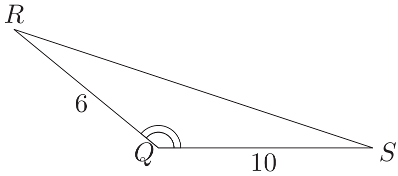


Рис. 14.29

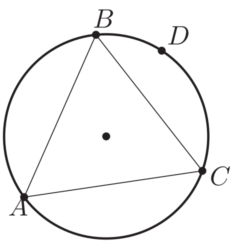


Рис. 14.30

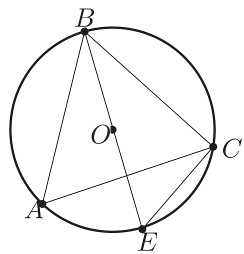


Рис. 14.31

Задача 7 (факультет государственного управления МГУ, 2003). На окружности радиуса 5, описанной около правильного треугольника, взята точка D. Известно. что расстояние от точки D до одной из вершин треугольника равно 9. Найдите сумму расстояний от точки D до двух других вершин треугольника.

Решение: Опишем около правильного треугольника ABC окружность и отметим на ней точку D (рис. 14.30). Из условия задачи известно, что точка D находится на расстоянии 9 от одной из вершин треугольника ABC. Попробуем выяснить, от какой именно.

Для начала вычислим длину стороны треугольника ABC. Сделать это совсем нетрудно. Проведём диаметр BE окружности и соединим точки E и C (рис. 14.31). В прямоугольном треугольнике BCE длина гипотенузы BE равна 10, а $\angle EBC = 30^\circ$. Отсюда

$$BC = BE \cdot \angle EBC = 10 \cdot \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}.$$

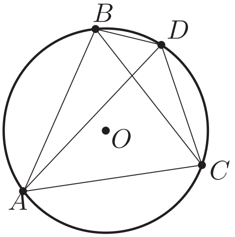


Рис. 14.32

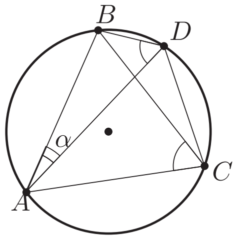


Рис. 14.33

Соединим точку D со всеми тремя вершинами A, B и C треугольника ABC (рис. 14.32). Ясно, что длины хорд DB и DC меньше длины хорды BC, длина которой в свою очередь меньше 9. В этом можно убедиться, сравнив квадраты 75 и 81 чисел $5\sqrt{3}$ и 9.

Тем самым, вершиной правильного треугольника, о которой идёт речь в условии задачи, может быть только A, и значит, $AD = 9$.

Так как $AD < 10$, то расстояние от точки D до одной из пары вершин B и C меньше, чем до другой. Для определённости будем считать, что $BD < DC$. Это означает, что величина $\angle BAD$ (обозначим её через α) меньше 30°,

$$\alpha < 30^\circ.$$

Рассмотрим треугольник ABD (рис. 14.33). Величина угла при вершине D этого треугольника равна 60° (вписанный в окружность угол $\angle ADB$ опирается на ту же дугу, что и угол $\angle ACB$ правильного треугольника ABC), а величина угла при вершине A равна α. Воспользуемся теоремой синусов. Имеем

$$\frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin 60^\circ} = 5\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = 10$$

(напомним, что треугольник ABC — равносторонний, и значит, $AB = BC = CA = 5\sqrt{3}$).

Обратимся к треугольнику ADC (рис. 14.34). Величина угла при вершине D этого треугольника равна 60° (вписанный в окружность угол $\angle ADC$ опирается на ту же дугу, что и угол $\angle ABC$ правильного треугольника ABC), а величина угла

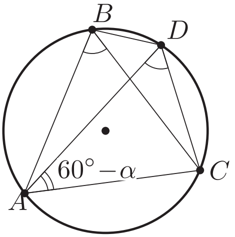


Рис. 14.34

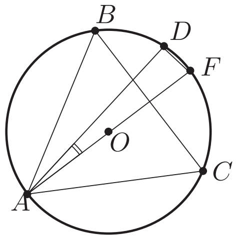


Рис. 14.35

при вершине A равна $60^\circ - \alpha$. Вновь воспользуемся теоремой синусов. Имеем

$$\frac{DC}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} = 5\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 10.$$

Отсюда получаем, что

$$BD = 10 \cdot \sin\alpha, \quad DC = 10 \cdot \sin(60^\circ - \alpha).$$

Теперь для того чтобы вычислить искомую сумму $BD+DC$, достаточно найти $\cos(30^\circ - \alpha)$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} BD + DC &= 10 \cdot \sin\alpha + 10 \cdot \sin(60^\circ - \alpha) = \\ &= 10 \cdot (\sin\alpha + \sin(60^\circ - \alpha)) = \\ &= 10 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos(30^\circ - \alpha) = 10 \cdot \cos(30^\circ - \alpha). \end{aligned}$$

Проведём диаметр AF окружности и соединим точки F и D (рис. 14.35). Острый угол при вершине A прямоугольного треугольника ADF равен $30^\circ - \alpha$. Найдём его косинус. Имеем

$$\cos(30^\circ - \alpha) = \frac{AD}{AF} = \frac{9}{10}.$$

Подставляя найденное значение в предыдущую формулу, окончательно получим, что

$$BD + DC = 10 \cdot \frac{9}{10} = 9.$$

Ответ: 9.

Третья группа задач посвящена четырёхугольникам, на которые окружности не накладывают никаких обязательств.

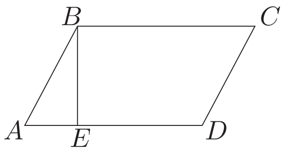


Рис. 14.36

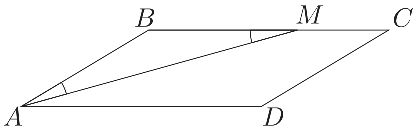


Рис. 14.37

Задача 8 (филологический факультет МГУ, 1981). В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 6, а высота, опущенная на основание AD, равна 3. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $MC = 4$; N — точка пересечения биссектрисы AM и диагонали BD. Вычислите площадь треугольника BNM.

Решение: Построим параллелограмм $ABCD$ и опустим из его вершины B перпендикуляр BE на сторону AD (рис. 14.36). В полученном прямоугольном треугольнике ABE длина катета BE в два раза меньше длины гипотенузы AB. Это означает, что $\angle A = 30^\circ$. Жаль, что точное значение величины этого угла нам так и не понадобится.

Однако перейдём к дальнейшим построениям. Проведём биссектрису AM угла A (рис. 14.37) и заметим, что получившийся в результате треугольник ABM является равнобедренным:

углы $\angle MAD$ и $\angle AMB$ равны как внутренние накрестлежащие при параллельных сторонах, а биссектриса угла $\angle A$ разбивает его на равные углы $\angle MAD$ и $\angle MAB$.

Тем самым, $BM = AB = 6$, а $BC = BM + MC = 6 + 4 = 10$.

Теперь настала пора провести диагональ BD (рис. 14.38).

Рассмотрим полученный в результате этого построения треугольник ABD. Биссектриса AN угла $\angle BAD$ делит сторону BD треугольника ABD на части, пропорциональные прилежащим сторонам,

$$BN : ND = AB : AD = 6 : 10.$$

Обратимся теперь к треугольникам BNM и AND (рис. 14.39). Они подобны (по трём углам). Длины их оснований BM и AD относятся как $3 : 5$. Такой же пропорцией

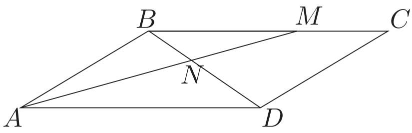


Рис. 14.38

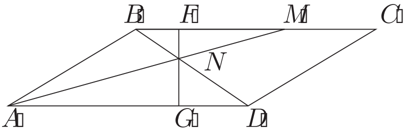


Рис. 14.39

связаны длины любой пары сходственных отрезков. В том числе и длины высот NF и NG, опущенных из точки N на основания BM и AD.

В результате мы получаем два соотношения

$$NF : GF = 3 : 5, \quad NF + NG = FG = 3.$$

Отсюда легко следует, что

$$NF = 3 \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{8}, \quad NG = 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{8}.$$

Вычислить площадь треугольника BNM, зная длины его высоты NF и основания BM, не составляет труда. Она равна

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8} \cdot 6 = \frac{27}{8}.$$

Ответ: 27/8.

Задача 9 (черноморский филиал МГУ (г. Севастополь), 1999). В выпуклом четырёхугольнике $KLMN$ диагонали KM и LN пересекаются в точке P. Площади треугольников KLP и MNP равны. Найдите угол LMK, если в треугольнике KPN задано отношение сторон $KP : PN : KN = 6 : 5 : 7$.

Решение задачи начнём с того, что построим выпуклый четырёхугольник $KLMN$ и проведём его диагонали KM и LN (рис. 14.40).

По условию задачи площади треугольников KLP и MNP, заштрихованных на рис. 14.41, равны. Используем это обстоятельство, чтобы показать – аналогичным свойством (равновеликости) обладают и треугольники KLN и KMN. В самом деле, каждый из этих треугольников разбивается на два, при этом треугольники KLP и MNP равновелики, а треугольник KPN является общим.

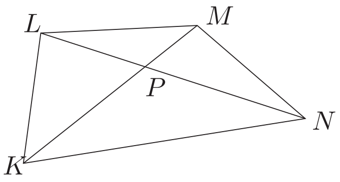


Рис. 14.40

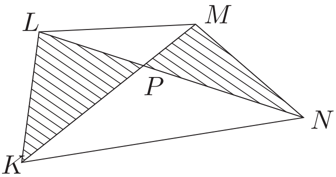


Рис. 14.41

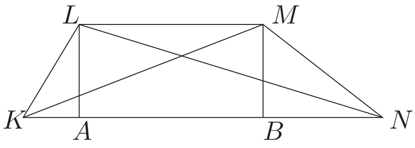


Рис. 14.42

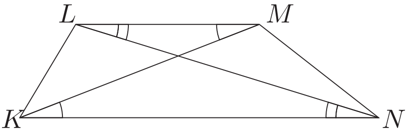


Рис. 14.43

Из того, что площади треугольников KLN и KMN равны, сразу же вытекает, что равны и их высоты LA и MB, опущенные на основание KN из вершин L и M соответственно. А это означает, что стороны LM и KN лежат на параллельных прямых и, следовательно, четырёхугольник $KLMN$ является трапецией с основаниями LM и KN (рис. 14.42).

Из равенства внутренних накрестлежащих углов, отмеченных на рис. 14.43, получаем, что треугольники LPM и KPN подобны. А так как у подобных треугольников сходственные стороны пропорциональны, в силу условия задачи получаем следующую пропорцию

$$PM : PL : LM = KP : PN : KN = 6 : 5 : 7.$$

Отсюда вытекает, что длины сторон треугольника LPM можно записать так

$$PM = 6a, \quad PL = 5a, \quad LM = 7a,$$

где $a > 0$ — некоторое число.

Чтобы найти угол $\angle LMN$, воспользуемся теоремой косинусов. Имеем

$$(5a)^2 = (7a)^2 + (6a)^2 - 2 \cdot 7a \cdot 6a \cdot \cos \angle LMN$$

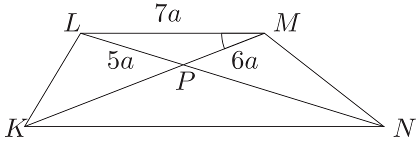


Рис. 14.44

(см. рис. 14.44). После несложных преобразований получим, что

$$60 = 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos \angle LMN,$$

и далее

$$\cos \angle LMN = \frac{5}{7}.$$

Ответ: $\arccos(5/7)$.

Задача 10 (экономический факультет МГУ (отделение экономики), 1999). В трапеции $ABCD$ ($AB \| CD$) диагонали

$$AC = a, \quad BD = \frac{7}{5}\,a.$$

Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.

Решение: Построим трапецию $ABCD$ и проведём её диагонали AC и BD (рис. 14.45). Отметим на этом рисунке углы $\angle CAB$ и $\angle DBA$ и соответственно равные им углы $\angle BDC$ и $\angle ACD$.

Удобно обозначить величину меньшего из этих углов через x. Тогда величина большего будет равна $2x$.

Найдём эти величины.

Опустим из вершин A и B трапеции перпендикуляры на основание CD или на его продолжение (рис. 14.46). Полученные отрезки AE и BF суть высоты трапеции. Отметим, что $AE = BF$.

Из прямоугольного треугольника ACE получаем, что

$$AE = a \cdot \sin 2x,$$

а из прямоугольного треугольника BDF, что

$$BF = \frac{7}{5}\,a \cdot \sin x.$$

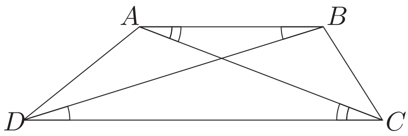


Рис. 14.45

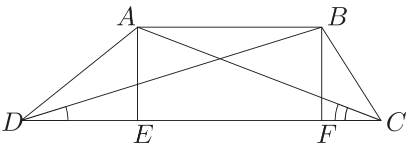


Рис. 14.46

Вследствие равенства $AE = BF$ заключаем, что

$$a \cdot \sin 2x = \frac{7}{5}\, a \cdot \sin x.$$

Преобразуем последнее соотношение. Имеем

$$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{7}{5} \cdot \sin x.$$

Отсюда

$$\cos x = \frac{7}{10}\,.$$

Отметим здесь же, что

$$\sin x = \frac{\sqrt{51}}{10}\,.$$

В задаче требуется найти площадь заданной трапеции.

Если известны все элементы трапеции, то её площадь можно найти разными способами. Зная, например, диагонали AC и BD трапеции и угол $\angle AOB$ между ними (рис. 14.47), площадь S трапеции можно вычислить так

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \angle AOB.$$

Эта формула получается без труда, если заметить, что диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника AOB, BOC, COD и DOA. Складывая площади этих треугольников

$$\frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin \angle AOB, \quad \frac{1}{2} \cdot BO \cdot CO \cdot \sin \angle BOC,$$
$$\frac{1}{2} \cdot CO \cdot DO \cdot \sin \angle COD, \quad \frac{1}{2} \cdot DO \cdot AO \cdot \sin \angle DOA,$$

и замечая, что

$$AO + CO = AC, \quad BO + OD = BD$$

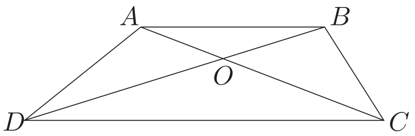


Рис. 14.47

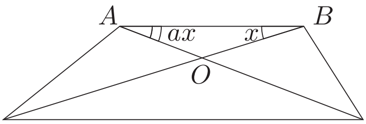


Рис. 14.48

и

$$\sin\angle AOB = \sin\angle BOC = \sin\angle COD = \sin\angle DOA,$$

получаем требуемую формулу.

Длины диагоналей AC и BD заданы. Осталось найти $\sin\angle AOB$.

Из треугольника AOB (рис. 14.48) получаем, что

$$\angle AOB = 180^\circ - \angle OAB - \angle OBA.$$

С учётом введённого выше обозначения

$$\sin\angle AOB = \sin(180^\circ - 2x - x) = \sin(180^\circ - 3x) = \sin 3x.$$

Для вычисления $\sin 3x$ воспользуемся известными тригонометрическими формулами

$$\sin 3x = \sin(x + 2x) = \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x,$$
$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \quad \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

и в результате получим, что

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{51}}{10}\cdot\left(2\left(\frac{7}{10}\right)^2 - 1\right) + \frac{7}{10}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{51}}{10}\cdot\frac{7}{10} = \frac{\sqrt{51}}{125}\cdot 12.$$

Сводя полученное в одну формулу, находим искомую площадь

$$S = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{7}{5}\,a\cdot\frac{\sqrt{51}}{125}\cdot 12 = \frac{42\sqrt{51}}{625}\,a^2.$$

Ответ:

$$\frac{42\sqrt{51}}{625}\,a^2.$$

⋆ ⋆ ⋆

Мы рассмотрели десять разных задач. Подлежащие определению величины были по-разному скрыты в их условиях.

Для того чтобы найти эти величины, мы пользовались и вычислениями, и рассуждениями, и рисунками. Решение каждой задачи мы старались строить так, чтобы сведения, заложенные в её условие, постепенно проступая, помогали нам в удачном выборе следующего шага. Более пятидесяти сопровождающих чертежей также в немалой степени этому способствовали.

При решении предложенных задач мы опирались на хорошо известные геометрические понятия, свойства и формулы. И если всмотреться в решение каждой из задач, то можно легко заметить, что оно слагается из последовательности простых и очень ясных шагов. Трудность геометрической задачи заключается в многообразии сочетаний простых фактов, привлекаемых для её разрешения.

Для того чтобы возобновить в памяти в нужный момент нужное свойство, иными словами, связать факты в цепочку рассуждений, построений и вычислений, приводящих к желанному ответу, необходимо научиться *видеть задачу*. Именно в этом и состоит основная трудность поиска решения в почти любой геометрической задаче.

Глава 15

БОЛЕЕ ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

В главах 6 и 7 мы рассмотрели способы решения уравнений, неравенств, а также ряда других типичных задач, в которых параметр играет существенную роль. Однако задачи с параметром, предлагающиеся на вступительных экзаменах (в том числе и для поступающих на гуманитарные специальности) чрезвычайно многообразны. Это вызывает у абитуриентов значительные трудности. И тем не менее, ни многообразие формулировок, ни их нестандартность не должны создавать впечатления, что научиться решать такие задачи невозможно.

Дорогу осилит идущий! И чем больше нестандартных задач с параметром будет вами решено или просто внимательно разобрано, тем больше у вас будет шансов справиться с задачей на экзамене.

Предлагая здесь более трудные задачи с параметром, мы хотим ещё раз особо обратить ваше внимание на то, что прежде чем *набрасываться на задачу*, стоит повнимательнее её порассматривать. Такое первоначальное созерцание задачи нередко подсказывает, как именно следует поступать для того, чтобы поиск её решения был успешным.

Задача 1 (филологический факультет МГУ, отделение прикладной лингвистики, 1984). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + 2a, \\ x \geqslant y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Рассматривая неравенства заданной системы, легко заметить, что они очень похожи. Чем же?

Если в первом из неравенств поменять местами x и y (вместо x написать y, а вместо y написать x), то получится в точности второе неравенство. Если же поменять местами x и y (вместо x написать y, а вместо y написать x) во втором из неравенств, то получится в точности первое. Иными словами, от перемены местами неизвестных x и y система не изменится.

Это простое наблюдение позволяет сделать важный вывод: если пара чисел $(x_\circ,y_\circ)$ является решением системы, то и пара чисел $(y_\circ,x_\circ)$ будет её решением.

Значит, в случае

$$x_\circ \neq y_\circ$$

система будет иметь по меньшей мере два решения $(x_\circ,y_\circ)$ и $(y_\circ,x_\circ)$.

Однако по условию задачи требуется найти такие значения параметра a, при которых система имеет единственное решение. С учётом сказанного ясно, что это может быть лишь при $x_\circ = y_\circ$.

Тем самым, в интересующем нас случае исходную систему неравенств можно записать в виде

$$\begin{cases} x \geqslant x^2 + 2a, \\ x \geqslant x^2 + 2a, \end{cases}$$

что равносильно одному неравенству

$$x^2 - x + 2a \leqslant 0.$$

Оно имеет единственное решение, если дискриминант квадратного трёхчлена равен 0, т. е. если $1 - 8a = 0$. Отсюда $a = \dfrac{1}{8}$.

Теперь нам нужно убедиться в том, что при найденном значении параметра a заданная система действительно имеет ровно одно решение.

Подставим $a = \dfrac{1}{8}$ в исходную систему и, сложив результаты, получим неравенство

$$x + y \geqslant x^2 + y^2 + \frac{1}{2},$$

которое легко можно привести к виду

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0.$$

Ясно, что последнее неравенство имеет единственное решение $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Теперь можно смело писать ответ.

Ответ: $a = \frac{1}{8}$.

Задача 2 (факультет психологии МГУ, 1995). Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$\cos 2x + a \leqslant 2\sqrt{x^2 + 16} - \frac{x^2 + 16}{a + \cos 2x}$$

имеет единственное решение.

Решение: Неспешный анализ выражений, входящих в предложенное неравенство, и в этой задаче подводит к важному наблюдению: при замене переменной x на $-x$ неравенство не изменяется. Это следует из чётности функций x^2 и $\cos 2x$,

$$(-x)^2 = x^2, \cos(-2x) = \cos 2x.$$

Следовательно, если число $x_\circ$ является решением этого неравенства, то и число $-x_\circ$ также должно быть его решением.

Это означает, что в случае

$$x_\circ \neq 0$$

неравенство будет иметь по меньшей мере два решения.

Однако по условию задачи требуется найти такие значения параметра a, при которых неравенство имеет ровно одно решение. С учётом сказанного ясно, что это может быть лишь в случае, когда $x_\circ = 0$.

Подставляя нулевое значение переменной x в неравенство, мы получим условие на параметр a,

$$1 + a \leqslant 8 - \frac{16}{a + 1}.$$

Выпишем решения этого уравнения. Имеем $a = 3$ и $a < -1$.

Подведём итог проделанному: для того чтобы заданное неравенство имело нулевое решение, необходимо, чтобы параметр a подчинялся одному из найденных условий: $a = 3$ и $a < -1$.

Однако совсем не исключено, что при этих значениях параметра a неравенство будет иметь и другие (ненулевые) решения.

Проверим, возможно ли это в данной задаче. Иными словами, проверим условия $a = 3$ и $a < -1$ на достаточность.

Подставляя в исходное неравенство $a = 3$, получим неравенство

$$\cos 2x + 3 \leqslant 2\sqrt{x^2+16} - \frac{x^2+16}{3+\cos 2x}\,.$$

Умножив обе его части на положительное выражение $\cos 2x+3$, после приведения подобных придём к неравенству

$$\left(3 + \cos 2x - \sqrt{x^2+16}\right)^2 \leqslant 0,$$

которое в силу неотрицательности левой части равносильно уравнению

$$3 + \cos 2x = \sqrt{x^2+16}.$$

Его неторопливый анализ (возведение в квадрат ни к чему хорошему не приведёт) показывает, что выражение в левой части не может больше выражения в правой. В самом деле, при всех x

$$3 + \cos 2x \leqslant 4,$$

а

$$\sqrt{x^2+16} \geqslant 4,$$

причём оба неравенства обращаются в равенства лишь при $x = 0$.

Следовательно, $a = 3$ условию задачи удовлетворяет.

Проверим теперь значения $a < -1$.

Переходя к неравенству

$$\frac{(a + \cos 2x - \sqrt{x^2+16})^2}{a + \cos 2x} \leqslant 0,$$

равносильному исходному, заметим, что при $a < -1$

$$a + \cos 2x < 0$$

для любого x. В силу неотрицательности числителя это означает, что рассматриваемое неравенство, а следовательно, и исходное, справедливо при всех значениях x. Поэтому ни одно из значений параметра, подчиняющегося условию $a < -1$, условию задачи не удовлетворяет.

Ответ: $a = 3$.

Задача 3 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1994). При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4 - y(a-1)\sqrt{a+3} + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a = 0, \\ y = x^2\sqrt{a+3} \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение: Сразу отметим, что $a \geqslant -3$. Исключив далее неизвестную y из первого уравнения, получим биквадратное уравнение следующего вида

$$x^4 - (a-1)(a+3)x^2 + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0.$$

Заметим, что исходная система будет иметь три различных решения тогда и только тогда, когда три различных корня будет иметь это биквадратное уравнение, которое в свою очередь будет иметь три различных корня в том и только в том случае, когда у квадратного уравнения

$$t^2 - (a-1)(a+3)t + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0,$$

полученного из биквадратного путём естественной замены $t = x^2$, один корень равен нулю, а второй положителен.

Последнее равносильно тому, что свободный член квадратного уравнения равен нулю,

$$a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0,$$

а коэффициент при неизвестной t отрицателен,

$$-(a-1)(a+3) < 0.$$

Решать простейшие уравнения четвёртой степени с целыми коэффициентами, у которых легко угадываются корни (в данном случае $a = 1$ и $a = -1$ угадываются без труда), мы научились в главе 2 «Рациональные уравнения и неравенства». Воспользовавшись дважды одним из изложенных там приёмов, получим все решения уравнения

$$a = 1, a = -1, a = 2, a = -4.$$

Ограничения на параметр a, заложенные в неравенство

$$(a-1)(a+3) > 0,$$

и условие $a \geqslant -3$ заставляют оставить лишь $a = 2$, отбросив все остальные значения.

Подставив найденное значение в исходную систему, легко убедиться в том, что получившаяся система

$$\begin{cases} x^4 = y\sqrt{5}, \\ y = x^2\sqrt{5} \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a = 2$.

Задача 4 (факультет почвоведения МГУ, 1994). При каких значениях параметров a и b система неравенств

$$\begin{cases} b + \cos ax \leqslant 2, \\ x^2 + 2bx + 9 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: Начнём со второго неравенства, которое содержит только параметр b. Оно равносильно неравенству

$$(x+b)^2 \leqslant b^2 - 9.$$

При $-3 < b < 3$ это неравенство решений не имеет (эти значения параметра отсекаем сразу).

При $b < -3$ и $b > 3$ оно имеет решения следующего вида:

$$-b - \sqrt{b^2 - 9} \leqslant x \leqslant -b + \sqrt{b^2 - 9}.$$

Чтобы определиться с этими значениями параметра b, необходимо подключить к анализу первое неравенство системы.

Запишем его несколько иначе. Имеем

$$b \leqslant 2 - \cos ax.$$

Значения $b > 3$ отсекаются немедленно, поскольку $2 - \cos ax \leqslant 3$ при всех a и x.

Тем самым, при $b > 3$ первое неравенство, а следовательно, и исходная система, решений не имеет.

При любом $b < -3$ исходная система будет иметь более одного решения, вследствие того, что в этом случае неравенство

$$b + \cos ax \leqslant 2$$

справедливо при всех значениях a и x.

Остаётся рассмотреть два значения параметра b: $b = 3$ и $b = -3$.

При $b = 3$ квадратное неравенство примет вид

$$(x + 3)^2 \leqslant 0.$$

Это возможно лишь при $x = -3$.

При $b = -3$ квадратное неравенство примет вид

$$(x - 3)^2 \leqslant 0.$$

Это возможно лишь при $x = 3$.

Подставляя значения $b = 3$ и $x = -3$ в первое неравенство, получим условие на параметр a,

$$3 + \cos 3a \leqslant 2,$$

или, что то же,

$$\cos 3a \leqslant -1.$$

Последнее неравенство равносильно уравнению

$$\cos 3a = -1,$$

решениями которого являются все

$$a = \frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3}\,, n \in \mathbf{Z}.$$

Рассуждая аналогично при $b = -3$ и $x = 3$, получаем, что искомые значения для параметра a должны удовлетворять неравенству

$$-3 + \cos 3a \leqslant 2,$$

или, что то же,

$$\cos 3a \leqslant 5,$$

решениями которого являются все действительные числа.

Ответ: $a = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2n\pi}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$, $b = 3$ или $a \in \mathbf{R}$, $b = -3$.

Задача 5 (геологический факультет МГУ, 1996). Найдите все действительные значения параметра b, при которых для любого действительного значения a уравнение

$$\cos(a + ab + ax) + 4\cos^2 ax = 5b^2$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение: Эта задача отличается от предыдущих не только тем, что нужно найти значения параметра, при которых уравнение имеет хотя бы одно решение, но и тем, что здесь требования на параметры, так сказать, не равноценны!

Поскольку уравнение должно иметь решение для любого a, попробуем подобрать такое его значение, при котором необходимые условия на b получались бы как можно легче. С этой точки зрения наилучшим (и самым простым) является $a = 0$.

Подставив его в уравнение, получим, что

$$5 = 5b^2,$$

откуда $b_1 = 1$ и $b_2 = -1$.

Итак, параметру b дозволено принимать только эти два значения.

Проверим их на достаточность.

При $b = 1$ получим уравнение

$$\cos(2a + ax) + 4\cos^2 ax = 5,$$

которое имеет решение тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия

$$\begin{cases} \cos(2a + ax) = 1, \\ \cos a^2 x = 1. \end{cases}$$

Выполнив равносильные преобразования, приходим к системе

$$\begin{cases} ax = 2n\pi - 2a, \\ a^2 x = 2m\pi, \end{cases} \quad n,m \in \mathbf{Z}.$$

Подставив ax из первого уравнения во второе, получим равенство

$$a(2n\pi - 2a) = 2m\pi.$$

При $a = 1$ оно не выполняется ни при каких целых n и m. Следовательно, значение $b = 1$ не пригодно.

При $b = -1$ заданное уравнение принимает вид

$$\cos ax + 4\cos^2 ax = 5,$$

которое имеет решение $x = 0$ при любом a.

Ответ: $b = -1$.

Задача 6 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 1997). Найдите все значения параметра a, при которых периметр фигуры, заданной на координатной плоскости условием

$$\log_{\frac{2-|ay|}{3}}\left(\frac{a^2+x^2}{2a^2}\right) > 0$$

будет наименьшим.

Решение: Задача кажется очень трудной. Действительно, глядя на исходное неравенство, определить вид описываемой им фигуры не так-то просто.

Возникает естественное желание как-то преобразовать заданное неравенство.

Прежде всего заметим, что

$$\frac{2-|ay|}{3} < 1$$

при любых значениях переменных и параметра a.

Отсюда сразу же следует, что исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{2-|ay|}{3} > 0, \\ \dfrac{a^2+x^2}{2a^2} < 1. \end{cases}$$

Учитывая далее, что $a \neq 0$, приведём её к следующему виду

$$\begin{cases} |y| < \dfrac{2}{|a|}, \\ x^2 < a^2. \end{cases}$$

Заменяя второе неравенство на равносильное

$$|x| < |a|,$$

получим искомые условия на переменные x и y

$$\begin{cases} |y| < \dfrac{2}{|a|}, \\ |x| < |a|, \end{cases}$$

из которых видно, что фигура, о которой идёт речь в условии задачи — это прямоугольник со сторонами $\dfrac{4}{|a|}$ и $2|a|$. Его периметр P равен

$$2\left(2|a| + \frac{4}{|a|}\right).$$

Для того чтобы найти значения параметра a, при которых полученное выражение будет минимальным, вспомним, что для любых $u > 0$ и $v > 0$ справедливо неравенство

$$u + v \geqslant 2\sqrt{uv}$$

(оно следует из очевидного неравенства $(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2 \geqslant 0$), причём равенство достигается лишь при $u = v$.

Положим

$$u = 2|a|, v = \frac{4}{|a|}.$$

Тогда

$$P \geqslant 4\sqrt{\frac{4}{|a|} \cdot 2|a|} = 8\sqrt{2}.$$

Таким образом, наименьшее значение периметра заданной фигуры равно $8\sqrt{2}$. Оно достигается, если

$$\frac{4}{|a|} = 2|a|.$$

Корни этого уравнения $a_1 = \sqrt{2}$ и $a_2 = -\sqrt{2}$ суть искомые значения параметра.

Ответ: $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = -\sqrt{2}$.

Задача 7 (геологический факультет МГУ, 1998). При каких значениях параметра a уравнение

$$\left|\frac{x^2 - 4ax + 4a^2 + 1}{x - 2a}\right| + x^2 - 2x - 1 = 0$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение: Решать это уравнение в лоб вряд-ли стоит.

Попробуем, как и в предыдущем примере, обратиться к равносильным преобразованиям и так упростить заданное уравнение, чтобы получение ответа на поставленный вопрос не вызвало непреодолимых трудностей.

Воспользовавшись просто выводимыми соотношениями

$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right| = \left|\frac{(x-2a)^2+1}{x-2a}\right| = \left|x-2a+\frac{1}{x-2a}\right|,$$

и

$$x^2-2x-1=(x-1)^2-2,$$

перепишем исходное уравнение в равносильной форме

$$\left|x-2a+\frac{1}{x-2a}\right|+(x-1)^2=2.$$

Его анализ не представит труда, если вспомнить часто используемое неравенство

$$\left|u+\frac{1}{u}\right| \geqslant 2,$$

справедливое для всех $u \neq 0$ (равенство достигается лишь при $|u|=1$).

Первое слагаемое в левой части последнего уравнения не меньше двух (в этом легко убедиться, положив $u=x-2a$). А вследствие того, что $(x-1)^2 \geqslant 0$ при всех x, получаем, что всё выражение в левой части больше либо равно 2 при всех x и a.

Это означает,

$$\begin{cases} (x-1)^2=0, \\ |x-2a|=1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $x=1$ будет решением лишь при тех значениях параметра a, для которых

$$|1-2a|=1,$$

а это $a_1=0$ и $a_2=1$.

Ответ: $a_1=0, a_2=1$.

Задача 8 (геологический факультет МГУ, 1999). Найдите наибольшее из значений параметра a, при которых уравнение

$$\operatorname{arctg}|9^x+4^x+a\sqrt{2}\cdot 6^x|=0$$

имеет решение.

Решение: Поскольку $\operatorname{arctg} u = 0$ только при $u = 0$, исходное соотношение равносильно уравнению

$$3^{2x} + 2^{2x} = -a\sqrt{2} \cdot 2^x \cdot 3^x.$$

Поделим обе его части на $2^x = \cdot 3^x$. В результате получим, что

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x = -a\sqrt{2}.$$

Воспользовавшись неравенством, привлечённом для поиска решения в предыдущем примере, заметим, что

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x \geqslant 2;$$

при этом равенство достигается лишь при $x = 0$.

Итак, наше уравнение имеет решение при всех a, удовлетворяющих неравенству $-a\sqrt{2} \geqslant 2$, т. е. при $a \leqslant -\sqrt{2}$. Наибольшим среди таких значений параметра является $-\sqrt{2}$.

Ответ: $a = -\sqrt{2}$.

Задача 9 (черноморский филиал МГУ (г. Севастополь), 2000). При каких значениях c и d неравенство

$$c \leqslant 7^{\frac{3x-1}{9x^2-6x+5}} < d$$

выполняется для всех действительных значений x?

Решение:

1-й способ: Заметим, что в знаменателе дроби

$$\frac{3x-1}{9x^2-6x+5}$$

стоит почти что квадрат числителя. Положим $t = 3x - 1$ и проведём равносильные преобразования этой дроби при $t \neq 0$. Имеем

$$\frac{3x-1}{9x^2-6x+5} = \frac{t}{t^2+4} = \frac{1}{t+\dfrac{4}{t}}.$$

В справедливости неравенства при $t > 0$

$$t + \frac{4}{t} \geqslant 4$$

легко убедиться непосредственно. Отсюда совсем просто вытекает, что при $t > 0$

$$\frac{t}{t^2+4} = \frac{1}{t+\frac{4}{t}} \leqslant \frac{1}{4},$$

а при $t < 0$

$$\frac{t}{t^2+4} = \frac{1}{t+\frac{4}{t}} \geqslant -\frac{1}{4}.$$

Поскольку при $t = 0$

$$\frac{t}{t^2+4} = 0,$$

с учётом двух последних неравенств получаем, что

$$-\frac{1}{4} \leqslant \frac{3x-1}{9x^2-6x+5} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Ясно, что неравенство в условии задачи выполняется при всех x, если $c \leqslant 7^{-\frac{1}{4}}$ и $d > 7^{\frac{1}{4}}$.

2-й способ: Приводя этот способ решения, обратим внимание читателя на некоторые возможности, о которых абитуриенты нередко забывают. Дело в том, что на вступительных экзаменах задачи на применение производной в явном виде встречаются не так часто. Вместе с тем, в школьной программе этот материал имеется, и значит, абитуриент имеет полное право применять свои знания и умения на экзамене. Например, при решении задач, связанных с нахождением максимальных и минимальных значений различных функций.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{3x-1}{9x^2-6x+5}$$

и исследуем её на экстремум.

Применяя правило дифференцирования дроби, найдём её производную. Она равна

$$\frac{-27x^2+18x+9}{(9x^2-6x+5)^2}$$

(проверьте это сами!).

Производная обращается в нуль там, где равен нулю её числитель, т. е. при $x = 1$ и $x = -\frac{1}{3}$. Как легко заметить, знаменатель в нуль не обращается ни при каком значении x.

Привлекая рассуждения, которым вы несомненно научились в школе, можно показать, что при $x = 1$ функция $f(x)$ принимает максимальное значение, равное $\frac{1}{4}$, а при $x = -\frac{1}{3}$ — минимальное значение, равное $-\frac{1}{4}$.

Так как основание 7 показательной функции больше 1, то для всех x справедливо неравенство

$$7^{-\frac{1}{4}} \leqslant 7^{\frac{3x-1}{9x^2-6x+5}} \leqslant 7^{\frac{1}{4}}.$$

А это означает, что условию задачи удовлетворяют все $c \leqslant 7^{-\frac{1}{4}}$ и $d > 7^{\frac{1}{4}}$.

Ответ: $c \leqslant 7^{-\frac{1}{4}}, d > 7^{\frac{1}{4}}$.

Задача 10 (экономический факультет МГУ, отделение экономики, 1994). Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуске одного телевизора составляют не менее

$$\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|$$

тыс. руб., а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит

$$540 - \frac{3}{10}\,n$$

тыс. руб. Определите ежемесячный объём производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях прибыль.

Решение: В этой задаче параметром является объём производства.

Обозначим число выпускаемых телевизоров через n. Ясно, что прибыль $P(n)$ равна выручке от продажи n телевизоров за вычетом расходов на их производство. Из условия задачи следует, что

$$P(n) \leqslant \left(540 - \frac{3}{10}\,n\right) n - \left(\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|\right) n,$$

или, после приведения подобных

$$P(n) \leqslant 540n - \frac{3}{10}\,n^2 - 40500 - 270 + |90n - 40500|.$$

Раскрывая модуль, получим, что при $n < 450$

$$P(n) \leqslant -\frac{3}{10}\,n^2 + 180n,$$

а при $n \geqslant 450$

$$P(n) \leqslant -\frac{3}{10}\,n^2 + 360n - 81000.$$

Графиком функции

$$P_1(x) = -\frac{3}{10}\,x^2 + 180x$$

является парабола, ветви которой направлены вниз, а координаты вершины — (300, 27000) (убедитесь в этом сами!).

Графиком функции

$$P_2(x) = -\frac{3}{10}\,x^2 + 360x - 81000$$

также является парабола, ветви которой направлены вниз, а координаты вершины — (600, 27000).

Поскольку $300 < 450$ и $600 > 450$, можно сделать вывод о том, что прибыль будет максимальной, если производить либо 300, либо 600 телевизоров.

Замечание. Решение задачи несколько усложнилось бы, если бы оказалось, что абсциссы вершин парабол $P_1(x)$ и $P_2(x)$ не являются целыми числами (параметр n может принимать только целые значения).

Ответ: 300 или 600 телевизоров.

ПРЕЖДЕ НЕМНОГО ПОДУМАЙТЕ!

Задания, предлагаемые на вступительных экзаменах по математике, бывают очень разными. Они отличаются и по сложности и по тематике. Среди них довольно много задач на простое знание формул — достаточно одного взгляда на задачу, для того чтобы было понятно, как её нужно решать. Но есть и такие задачи, решение которых, несмотря на их простоту, требует непременных предварительных размышлений. К ним относятся, в частности, задачи с непривычными (порой в чём-то даже провокационными) формулировками, хотя за этими формулировками нередко скрываются довольно простые задачи. Однако, для того чтобы разобраться с условием такой задачи, для того чтобы задача стала понятной, требуется определённое время. Нужно, как говорят, *вчитаться* в задачу. Именно о таких заданиях и пойдёт речь в этом разделе.

Покажем, что означает сказанное выше, на нескольких примерах, которые либо предлагались на письменном экзамене по математике на отделение антикризисного управления факультета государственного управления МГУ им. М.В. Ломоносова, либо близки к ним.

Задача 1. От пункта A до пункта B мотоциклист ехал с постоянной скоростью 60 км/час, а обратно, от пункта B до пункта A, с постоянной скоростью 40 км/час. Какой была его средняя скорость на маршруте ABA?

Решение: Заметим прежде всего, что в задаче известны не все значения существенных величин. Например, расстояние между пунктами A и B неизвестно. Поэтому для осмысления условий задачи нам совершенно необходимо ввести соответствующие обозначения.

Обозначим через S расстояние между пунктами A и B, а через v — искомую среднюю скорость. По определению затраты времени на перемещение по маршруту ABA со средней скоростью v должны совпадать с реальными временны́ми затратами.

Подсчитаем их. Так как время, затраченное мотоциклистом на перемещение из пункта A в пункт B, равно

$$\frac{S}{60},$$

а из пункта B в пункт A —

$$\frac{S}{40},$$

то общее время, которое он затратил на перемещение по маршруту ABA, будет равно их сумме, т. е.

$$\frac{S}{60} + \frac{S}{40}.$$

Это позволяет нам написать следующее равенство:

$$\frac{2S}{v} = \frac{S}{60} + \frac{S}{40}.$$

Разделив обе части на S, получим

$$\frac{2}{v} = \frac{1}{60} + \frac{1}{40}$$

и далее

$$\frac{2}{v} = \frac{40 + 60}{60 \cdot 40}.$$

Отсюда вытекает, что средняя скорость

$$v = 2 \cdot \frac{2400}{100} = 48.$$

Обсуждение. Многих абитуриентов (из числа тех, кому не удалось решить эту задачу) определённым образом смутило слово *средняя*. Если вы не будете вчитываться в условие, а среагируете только на это слово, то мимо вас пройдёт бо́льшая часть условий задачи. Вместе с тем, перечитав текст задачи несколько раз, вы сможете (возможно, не сразу) увидеть все связи, описанные в её условиях, и с большой вероятностью вспомните, что средняя скорость равна отношению пройденного пути на затраченное на это время (а вовсе не полусумме скоростей). Если теперь ввести величины, количественное наполнение которых неизвестно, то дальше задача разрешится как бы сама собой.

Задача 2. Автозаправочные станции C и D расположены на трассе на расстоянии 12 км одна от другой. В какой точке трассы следует разместить бензосклад для того, чтобы суммарные затраты на их перевозку были минимальны, если на АЗС C поставляется 6 тонн бензина в сутки, а на АЗС D — 3 тонны?

Решение: То обстоятельство, что затраты на перевозку определяются объёмом перевозимого груза и расстоянием, а именно, пропорциональны их произведению, подавляющее большинство абитуриентов знает, но почему-то многие пишут, что склад горюче-смазочных материалов должен быть расположен в два раза ближе к бензоколонке C, чем к бензоколонке D, т. е. располагаться в 40 км от C и в 80 км от D.

Однако это не так.

Вчитайтесь в условие — вам неизвестна удалённость бензосклада от автозаправочных станций. Если обозначить через x км, $x \geqslant 0$, расстояние от места предполагаемого бензосклада E до АЗС C, то расстояние D от неё до АЗС будет равно $12-x$ км. Тем самым, суммарные затраты на перевозку бензина будут пропорциональны

$$6x + 3(12 - x) = 3x + 36.$$

Полученная сумма принимает наименьшее значение при $x = 0$.

Это означает, что бензосклад должен находиться там же, где расположена АЗС большей мощности, т. е. АЗС C.

Обсуждение. Как видите, эта задача становится совсем простой, но лишь после того как вы внимательно прочтёте её текст. Ошибка, о которой говорилось в самом начале описания решения задачи, состоит в том, что в этом случае вы находите точку на трассе, обладающую другим свойством, а именно: затраты на перевозку от этой точки на трассе до обеих автозаправочных станций будут одинаковыми. Но это вовсе не означает, что суммарные затраты окажутся минимальными.

Задача 3. Три предприятия F, G и H строят сооружение на равных долевых началах. Для строительства потребовалось 110 каменных блоков. Предприятие F предоставило 70 блоков, предприятие G остальные 40, а предприятие H решило всю свою долю оплатить деньгами, выделив для этого 110 тысяч условных денежных единиц. Как разделить эти деньги между предприятиями F и G?

Решение: Количество каменных блоков, которое должно предоставить каждое из предприятий, равно

$$\frac{110}{3}.$$

Вклад предприятия H — 110 тысяч условных денежных единиц — это его доля, которую оно должно оплатить за положенные ему

$$\frac{100}{3}$$

каменных блоков. Следовательно, стоимость одного каменного блока равна

$$110 : \frac{100}{3} = 3$$

т. е. 3 тысячи условных денежных единиц.

Тем самым, предприятие F затратило на каменные блоки $70 \cdot 3 = 210$ тысяч условных денежных единиц, а предприятие G — $40 \cdot 3 = 120$ тысяч условных денежных единиц.

Поскольку денежный вклад каждого из предприятий должен составлять 110 тысяч условных денежных единиц, то, чтобы уравнять расходы, предприятию F из 110 тысяч условных денежных единиц нужно получить $210 - 110 = 100$ тысяч условных денежных единиц, а предприятию G причитается $120 - 110 = 10$ тысяч условных денежных единиц.

Обсуждение. Абитуриенты, которым не удалось решить эту задачу, обычно делили вклад в 110 тысяч условных денежных единиц пропорционально количеству каменных блоков, внесённых предприятиями G и H, т. е. как $7 : 4$. Тем самым, предприятию G предлагалось 70 тысяч условных денежных единиц (на 50 меньше), а предприятию H — 40 (на 30 больше), что несправедливо. При таком рассуждении учтены, казалось бы, все числовые показатели задачи, а предложенное распределение неверно. В чём же дело? А всё очень просто — при таком подходе не учтена стоимость одного каменного блока.

Рассмотрим теперь две задачи немного потрудней. Обе эти задачи решаются одним и тем же приёмом — заменой на более простые, способ решения которых и ответ почти очевидны.

Задача 4. Пять пиратов делят 10 слитков золота. Процедура дележа устроена так: сначала старший пират предлагает делёж по своему выбору. Если больше половины пиратов его отвергают, второй по старшинству пират предлагает новый делёж добычи среди оставшихся четырёх (старший пират никакого участия в дальнейшем дележе не принимает). Если новый делёж отвергается большинством голосов, то предлагавший его пират от дальнейшего участия в дележе устраняется и процедура повторяется для трёх пиратов. Как будут распределены слитки золота, если каждый пират из двух данных дележей предпочтет тот, в котором его доля золотых слитков больше?

Решение: Описание процедуры дележа начнём с простого случая, когда число участвующих в нём пиратов равно двум. В этом случае старший пират забирает всё золото — половина (он сам) поддерживает его предложение.

Тем самым, итог дележа — (10, 0).

В случае, если число пиратов равно трём, старший пират предлагает делёж, дающий 9 слитков ему и 1 слиток младшему (младший, понимая, что если он поддержит среднего пирата, то в итоге не получит ничего, вынужден с этим предложением согласиться).

Тем самым, итог дележа — (9, 0, 1).

В случае, если число пиратов равно четырём, старший пират рассуждает так: «Если мое предложение будет отвергнуто, то три оставшихся пирата разделят золотые слитки по правилу (9, 0, 1); следовательно, я должен предложить такой делёж, который был бы выгоднее хотя бы одному из них, а мне давал бы наибольшую возможную долю».

Единственное решение этой задачи — делёж (9, 0, 1, 0), в котором старший пират жертвует лишь одним слитком (в пользу пирата, третьего по старшинству).

Рассуждая подобным образом и в случае пяти пиратов, в итоге получаем ответ — (8, 0, 1, 0, 1).

Задача 5. Каково минимальное число гирь, необходимых для того, чтобы взвесить любой грузик массой от 1 до 40 граммов на рычажных (чашечных) весах, если известно, что этот грузик может весить только целое число граммов?

Решение: Без спешки перечитывая текст задачи, обратим внимание на то, что чашки, используемые в таких весах, совершенно одинаковы (см. рис. 1), а взвешивание осуществляется путём уравновешивания помещённых на чашки грузиков.

В этом неслучайном условии задачи стоит разобраться.

Из того, что чашки одинаковы, вытекает, что каждую из гирь можно класть на любую из чашек — как на чашку, свободную от взвешиваемого грузика, так и на чашку с грузиком.

Заметим также, что по условию задачи каждый грузик может оказаться на весах только один раз.

Теперь сравнительно нетрудно додуматься и до правильного ответа. Сложнее найденный ответ обосновать.

Будем вести наши рассуждения, отталкиваясь от заданного числа гирь, и искать максимально возможное число грузиков, которые можно взвесить при помощи этих гирь.

Предположим сначала, что в нашем распоряжении имеются только две гири массой a и b граммов ($a < b$), и попробуем ответить на вопрос: каково наибольшее число различных по массе грузиков, которые можно взвесить этими гирями при условии, что гири разрешается класть на обе чашки?

Ясно, что это число не больше четырёх: массы взвешиваемых грузиков равны a, b, $b - a$ и $a + b$ граммов.

В частности, при помощи гирь массой в 1 и 3 грамма можно взвесить ровно четыре грузика — в 1, 2, 3 и 4 грамма.

Увеличим число гирь на одну.

При помощи трёх гирь массой в a, b и c граммов ($a < b < c$) можно взвесить не больше тринадцати грузиков: массы взвешиваемых грузиков равны a, b, c, $a+b$, $a+c$, $b+c$, $a+b+c$,

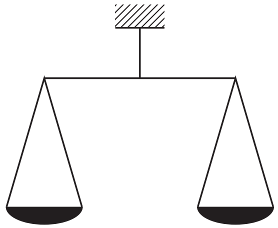


Рис. 15.1

$b - a$, $c - a$, $c - b$, $a + c - b$, $b + c - a$ и $a + b - c$ (или $c - a - b$, если $a + b - c < 0$) граммов.

В частности, при помощи набора гирь в 1, 3 и 9 граммов можно взвесить любой из тринадцати грузиков — в 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 13 граммов.

Вновь обратимся к тексту задачи.

Из проведённых рассуждений ясно, что взвесить любой из сорока грузиков разной массы только тремя гирями мы не сможем. Это означает, что минимальное число гирь никак не может быть меньше четырёх.

Добавляя к гирям массой в 1, 3 и 9 граммов ещё одну гирю массой 27 граммов, легко убедиться в том, что при помощи этого набора гирь можно взвесить любой грузик массой от одного до сорока граммов.

Тем самым, минимальное число гирь равно четырём.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В этот раздел мы поместили задания для самостоятельного решения, выбрав их среди задач вступительных экзаменов на различные факультеты Московского университета, а также задач, уровень сложности которых вполне соответствует тем, что были разобраны в гл. 1–10.

Конечно, выполнение предлагаемых заданий требует определённого (отнюдь, впрочем, не чрезмерного) напряжения, но важно понимать, что успехи в любых математических занятиях появляются только как результат привлечения осознанных усилий.

Какие-то из заданий будут получаться без особого труда, другие могут вызвать вопросы, а что-то получаться не будет. Но не отчаивайтесь. Начинайте с тех задач, поиск решений которых кажется вам вполне ясным. Порешайте их, и через некоторое время вы увидите, что количество заданий, которые первоначально показались вам непосильными, начнёт сокращаться. Конечно, по истечении времени среди предлагаемых заданий могут остаться и нерешённые. Это естественно — подумайте только, что бы представляла собой наша жизнь, если бы на все возникающие вопросы мы мгновенно находили ответы. Но «*ключом ко всякому знанию является знак вопроса*». Это высказывание О. Бальзака помогает не бояться вопросов, а напротив — помогает пытаться найти ответы на них, спрашивая своих товарищей и учителей или обращаясь к книжкам и собственным размышлениям. Успех приходит к тому, кто склонен его добиваться. И нам остаётся пожелать вам успехов. Как при решении заданий, предлагаемых ниже, так и заданий, с которыми вы встретитесь на вступительных экзаменах.

К ГЛАВЕ 1. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Задача 1 (биологический факультет МГУ, 1995). Решите уравнение

$$|2x+3|+|x+1|=2.$$

Задача 2 (биологический факультет МГУ, 1996). Решите уравнение

$$(x-1)^2-7|x-1|-18=0.$$

Задача 3 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1997). Решите уравнение

$$2|x-6|-3|2x-7|=1-4|x-2|.$$

Задача 4 (факультет психологии МГУ, 1998). Решите уравнение

$$\Big|2x-|4-7x|+5\Big|=37.$$

Задача 5 (факультет психологии МГУ, 1995). Решите уравнение

$$|3x-8|-19=-|3x+11|.$$

Задача 6 (химический факультет МГУ, 1994). Решите неравенство

$$4x-1>3|x|.$$

Задача 7 (биологический факультет МГУ, 1998). Решите неравенство

$$|x^2+x-2|+|x+4|\leqslant x^2+2x+6.$$

Задача 8 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1998). Решите неравенство

$$x>\frac{2x+2}{|x+3|}.$$

Задача 9 (Черноморский филиал МГУ, 2000). Решите неравенство

$$\Big||2x^2-7x|-3\Big|\leqslant 2x^2+7x+4.$$

Задача 10 (экономический факультет МГУ, отделение экономики, 2001). Решите неравенство

$$|x^2+5x+4|\leqslant|x^2-4|.$$

Задача 11 (экономический факультет МГУ, отделение экономики, 2000). Решите неравенство

$$3\sqrt{x^2+4x+4}-8-x=\left(\sqrt{-x^2-7x-10}\right)^2.$$

К ГЛАВЕ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Задача 1. Решите уравнение

$$\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\frac{7}{x} - 2x^2 + 7x - \frac{2}{x^2} = 9.$$

Задача 3. Решите неравенство

$$x^2 + 1 > \frac{x^2 - 5}{x^2 - 2}.$$

Задача 4 (физический факультет МГУ, 1995). Решите неравенство

$$\frac{x}{x-1} \leqslant \frac{x-2}{x}.$$

Задача 5 (химический факультет МГУ, 1995). Решите неравенство

$$\frac{4x}{x^2+3} \geqslant 1.$$

Задача 6 (факультет почвоведения МГУ, 1998). Решите неравенство

$$\frac{2}{|x+3|-4} \leqslant \frac{1}{|x+3|-2}.$$

Задача 7 (социологический факультет МГУ, 1998). Решите неравенство

$$\frac{x-2}{2x} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Задача 8 (факультет психологии МГУ, 1979). Решите неравенство

$$\frac{4}{|x+1|-2} \geqslant |x-1|.$$

Задача 9 (геологический факультет МГУ, 1995). Решите неравенство

$$\frac{20}{(x-3)(x-4)} + \frac{10}{x-4} + 1 \leqslant 0.$$

Задача 10 (геологический факультет МГУ, 1998). Решите неравенство

$$\frac{x^2+7x-8}{|x+6|} < 0.$$

К ГЛАВЕ 3. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С РАДИКАЛАМИ

Задача 1 (химический факультет МГУ, 1997). Решите уравнение

$$\sqrt{8x^2 - 40x + 50} = 7 - 3x.$$

Задача 2 (факультет почвоведения МГУ, 1997). Решите уравнение

$$\sqrt{3+2x} = x.$$

Задача 3 (географический факультет МГУ, 1995). Решите уравнение

$$\sqrt{3-x^2} = |x|+1.$$

Задача 4 (факультет психологии МГУ, 1996). Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2-21x+4} = 2-11x.$$

Задача 5 (геологический факультет МГУ, 1994). Решите уравнение

$$y+8\sqrt{y^2+y-6}-6+y^2 = 0.$$

Задача 6 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1997). Решите уравнение

$$\sqrt{2x+6}+\sqrt{3}(x-1) = 0.$$

Задача 7 (химический факультет МГУ, 1995). Решите неравенство

$$\sqrt{x+4} > x+2.$$

Задача 8 (факультет психологии МГУ, 1997). Решите неравенство

$$\sqrt{u+6} > 3-4u.$$

Задача 9 (физический факультет МГУ, 1996). Решите неравенство

$$\frac{x-1}{x\sqrt{4+3x-x^2}} > 0.$$

Задача 10 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 1998). Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-4x+3} < 1+\sqrt{x^2+2x+2}.$$

Задача 11 (геологический факультет МГУ, 1985). Решите уравнение

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6} = 4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$$

К ГЛАВЕ 4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Задача 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y = -1, \\ 5x+4y = 1. \end{cases}$$

Задача 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 8, \\ 2x + 4y = 9. \end{cases}$$

Задача 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 6y = 5, \\ x + 3y = 2{,}5. \end{cases}$$

Задача 4 (механико-математический факультет МГУ, 1979). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y} + \dfrac{3}{x-2y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x-y} - \dfrac{1}{x-2y} = \dfrac{1}{18}. \end{cases}$$

Задача 5 (физический факультет МГУ, 1997). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y + |x+1| = 1, \\ |y - x| = 5. \end{cases}$$

Задача 6 (геологический факультет МГУ, 2000). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^4 + y^2 = 10, \\ x^2 + 2y^4 = 10. \end{cases}$$

Задача 7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$$

Задача 8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 102, \\ xy + x + y = 69. \end{cases}$$

Задача 9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 5, \\ (x+y)(x^2-y^2) = 9. \end{cases}$$

Задача 10. Найдите значение выражения $x + 8y + 9z$, если известно, что

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1, \\ -3x + z = 2. \end{cases}$$

К ГЛАВЕ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Задача 1. Найдите все решения уравнения

$$\cos 2x - \sqrt{2}\sin x = 0.$$

Задача 2. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{3}\sin 3x - 4\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0.$$

Задача 3 (геологический факультет МГУ, 1994). Найдите все решения уравнения

$$\sin 5x = \sin 5.$$

Задача 4 (физический факультет МГУ, 1997). Найдите все решения уравнения

$$\cos 9x - \cos 7x = \sqrt{2}\sin x.$$

Задача 5 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1994). Найдите все решения уравнения

$$12\sin 5x = \cos 10x + 7.$$

Задача 6. Найдите все решения уравнения

$$11\sin 5x - 7\cos 5x = 0.$$

Задача 7 (физический факультет МГУ, 1996). Найдите все решения уравнения

$$1 - \sin 5x = \cos 5x.$$

Задача 8. Найдите все решения уравнения

$$6\sin x - 5\cos x = 4.$$

Задача 9 (химический факультет МГУ, 1994). Найдите все решения уравнения

$$\sin 2x + \cos^2 x = 0.$$

Задача 10. Найдите все решения уравнения

$$2\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3.$$

Задача 11 (физический факультет МГУ, 1990). Найдите все решения уравнения

$$\cos x \cdot \cos 3x = \cos 2x.$$

Задача 12. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg} 5x + 1 = \frac{1}{\cos^2 5x}.$$

Задача 13. Найдите все решения уравнения

$$2\sin 2x = \cos x + \sin x + 1.$$

Задача 14. Найдите все решения уравнения

$$\sin x + |\cos x| = 0.$$

Задача 15. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\cos x} - \sin x = 0.$$

Задача 16 (факультет психологии МГУ, 1995). Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2+\cos x} = 0.$$

Задача 17 (геологический факультет МГУ, 1983). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3\sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \dfrac{3}{2}\pi. \end{cases}$$

Задача 18. Найдите все решения уравнения

$$2\cos 4x - 3\sin 3y = 5.$$

Задача 19. Найдите все решения уравнения

$$2\cos 4x + 3\sin 3x = 5.$$

Задача 20. Найдите

$$\arcsin(\sin 14).$$

Задача 21 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 1999). Найдите все решения уравнения

$$x = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6x + \cos 7x).$$

К ГЛАВЕ 6. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Задача 1. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$ax = a^2 - 9 - 3x.$$

Задача 2. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$a^2x - a = x + 1.$$

Задача 3 (геологический факультет МГУ, отделение геофизики, 1979). Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{a}{a-2x} = 2.$$

Задача 4. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{x+4} - 2a = 3.$$

Задача 5. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$|x| + 1 = a^2 x + a.$$

Задача 6. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$ax^2 - 2 \geqslant x^2.$$

Задача 7 (физический факультет МГУ, 1997). Для любых значений параметра a решите неравенство

$$5 - a > (4-a)\sqrt{x-3}.$$

Задача 8 (факультет почвоведения МГУ, 1997). Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$\sqrt{a^2 - x^2} \geqslant a + 1.$$

Задача 9 (географический факультет МГУ, 1970). При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax - 4y = a + 1, \\ 2x + (a+6)y = a + 3 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений.

Задача 10 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1995). Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$x^2 - 6x + 4a|x-3| + 4a^2 \leqslant 0$$

имеет не более одного решения.

К ГЛАВЕ 7. КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН И ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Задача 1 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1980). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(a+1)x^2 - ax + (a-3) = 0$$

имеет не более одного корня.

Задача 2 (филологический факультет МГУ, отделение структурной и прикладной лингвистики, 1977). Для каждого значения параметра a определите число решений уравнения

$$|x^2 - 2x - 3| = a.$$

Задача 3. При каких значениях параметра a неравенство

$$ax^2 - 9ax + 5a + 1 > 0$$

выполняется при всех значениях x?

Задача 4 (филологический факультет МГУ, отделение структурной и прикладной лингвистики, 1983). Найдите все значения a, при которых уравнение

$$|1 - ax| = 1 + (1-2a)x + ax^2$$

имеет ровно одно решение.

Задача 5. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + ax + (a^2 - 3) = 0$$

минимальна?

Задача 6 (географический факультет МГУ, 1990). Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a+1)x^2 + (|a+2| - |a+10|)x + a = 5$$

имеет два различных положительных корня.

Задача 7. Исследуйте знаки корней уравнения

$$(a-3)x^2 - 6x + a + 5 = 0$$

(если таковые имеются) в зависимости от различных значений параметра a.

Задача 8. Найдите все значения параметра a, при которых оба корня уравнения

$$2x^2 + ax - 2 = 0$$

меньше 1.

Задача 9. При каких значениях параметра a оба корня уравнения

$$ax^2 - ax - x + 2 = 0$$

лежат между -1 и 1?

Задача 10 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 1995). Найдите все значения параметра b, при которых уравнение

$$x - 2 = \sqrt{2(b-1)x + 1}$$

имеет единственное решение.

Задача 11 (физический факультет МГУ, 1994). Для каких значений a система неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geqslant 0, \\ x \leqslant 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x?

К ГЛАВЕ 8. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Задача 1 (факультет почвоведения МГУ, 1995). Решите уравнение

$$5^{2x} = 115 \cdot 5^{x-1} + 50.$$

Задача 2 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1994). Решите уравнение

$$3^{x \log_3 5} \cdot 5^{x^2 - 3x} = 1.$$

Задача 3 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 1998). Решите уравнение

$$2^{2(2y-1)^2+2} - 38 \cdot 2^{4y^2-4y} + 12 = 0.$$

Задача 4. Решите уравнение

$$4^{-1/x} + 6^{-1/x} = 9^{-1/x}.$$

Задача 5 (физический факультет МГУ, 1997). Решите уравнение

$$7 \cdot \frac{4^{x-2}}{4^x - 3 \cdot 5^x} = 1 + 3 \cdot \frac{5^x}{4^x}.$$

Задача 6 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 1997). Решите уравнение

$$3^{|x|} = 5^{x^2+3x}.$$

Задача 7. Решите уравнение

$$|x-3|^{x^2-x} = (x-3)^2.$$

Задача 8 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1996). Решите неравенство

$$3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^{x+1} - 5 \leqslant 0.$$

Задача 9 (химический факультет МГУ, 1997). Решите неравенство

$$(2+\sqrt{3})^x + 2 < 3(2-\sqrt{3})^x.$$

Задача 10 (геологический факультет МГУ, 1977). Решите неравенство

$$\frac{2^{x+3}+11}{2^{2x+1}+2^x-15} \leqslant 3.$$

Задача 11 (факультет почвоведения МГУ, 1994). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x-1} + y = 2, \\ 3^{2x-1} + 2y = 5. \end{cases}$$

К ГЛАВЕ 9. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Задача 1 (социологический факультет МГУ, 1998). Решите уравнение

$$\log_7(x^2-5) = 2\log_{49}(x+1).$$

Задача 2 (филологический факультет МГУ, отделение структурной и прикладной лингвистики, 1989). Решите уравнение

$$\log_{2x+2}(2x^2-8x+6) = 2.$$

Задача 3 (физический факультет МГУ, 1989). Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\log_2 x^2 + \log_2(x-6) = 4.$$

Задача 4 (экономический факультет МГУ, 1978). Решите уравнение

$$\log_{2x^2-1}\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) = 2 - \frac{1}{\log_3\left(2x^2-1\right)}.$$

Задача 5 (Черноморский филиал МГУ, 2000). Решите уравнение

$$\log_3\left(\log_3 x\right) = \log_9\left(5 - 4\log_3 x\right).$$

Задача 6 (физический факультет МГУ, 1991). Решите неравенство

$$\log_{49}(x+3) - \log_7(x+2) < 0.$$

Задача 7 (факультет почвоведения МГУ, 1997). Решите неравенство

$$\log_{\frac{3}{4}}\left(3x+4\right) < \log_{\frac{3}{4}} x^2.$$

Задача 8 (факультет государственного управления МГУ, отделение антикризисного управления, 2001). Решите неравенство

$$\log_2\left(2^x - 3\right) \cdot \log_{\sqrt{2}}\left(4^{x+2} - 12 \cdot 2^{x+3} + 144\right) < 32.$$

Задача 9 (филологический факультет МГУ, отделение структурной и прикладной лингвистики, 1990). Решите неравенство

$$\log_{x-2}(3x - x^2) \leqslant 2.$$

Задача 10 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 1995). Решите неравенство

$$\log_{\frac{5x-1}{5x+1}}\left(x - \frac{1}{5}\right) \leqslant 1.$$

Задача 11 (экономический факультет МГУ, отделение экономики, 2000). Решите неравенство

$$\frac{\log_3 8}{\log_3(x^2-8)} \geqslant \frac{\log_2\left(x^2+6x+8\right)}{\log_2(x^2-8)}$$

Задача 12 (факультет психологии МГУ, 1989). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x 25 + 2y = 2, \\ -(\log_x 0{,}2)^3 + y = 1. \end{cases}$$

К ГЛАВЕ 10. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Задача 1 (геологический факультет МГУ, 1979). В двух банках в конце года на каждый счёт начисляется прибыль: в первом банке — 60% к текущей сумме на счёте, во втором — 40% к текущей сумме на счёте. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги — во второй банк с таким расчётом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

Задача 2 (механико-математический факультет МГУ, 1997). Из пункта A в пункт B со скоростью 80 км/час выехал автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью выехал второй. После остановки на 20 мин в пункте B второй автомобиль поехал с той же скоростью назад, через 48 км встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии 120 км от пункта B в момент прибытия в B первого автомобиля. Найдите расстояние от пункта A до места первой встречи автомобилей, если $AB=$ 480 км.

Задача 3 (филологический факультет МГУ, 1979). Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Производительность всех трёх одновременно действующих линий в полтора раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 часа 48 минут быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 часа быстрее, по сравнению с первой линией. Найдите время выполнения первой линией своего сменного задания.

Задача 4 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1996). Первый раствор содержит 20% азотной кислоты и 80% воды, второй — 60% азотной кислоты и 40% воды. Первая смесь была получена из 15 литров первого раствора и некоторого количества второго раствора. Смешав то же самое количество второго раствора с 5 литрами первого раствора, получили вторую смесь. Сколько литров второго раствора было использовано для приготовления первой смеси, если процентное содержание воды во второй смеси вдвое больше процентного содержания кислоты в первой?

Задача 5 (экономический факультет МГУ, 1983). В магазине продаются красные и синие карандаши. Красный карандаш стоит 17 копеек, синий — 13 копеек. На покупку карандашей можно затратить не более 4 рублей 95 копеек. При покупке число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей более чем на пять. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество красных и синих карандашей, при этом красных карандашей нужно купить как можно меньше. Сколько красных и сколько синих карандашей можно купить на указанных условиях?

Задача 6 (социологический факультет МГУ, 1997). В дошкольном учреждении провели опрос. На вопрос: «Что вы любите больше — кашу или компот?» — бо́льшая часть ответила: «Кашу», меньшая: «Компот», а один респондент: «Не знаю». Далее выяснили, что среди любителей компота 30% предпочитают абрикосовый, а 70% — грушевый. У любителей каши уточнили, какую именно кашу они любят. Оказалось, что 56,25% выбрали манную, а 37,5% — рисовую, и лишь один сказал: «Не знаю». Сколько детей было опрошено?

К ГЛАВЕ 11. ПРОГРЕССИИ

Задача 1 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 1998). Четвёртый член арифметической прогрессии равен 4, а разность между восьмым и третьим членами равна 11. Найдите сумму первых пятнадцати членов прогрессии.

Задача 2 (географический факультет МГУ, 1990). Произведение первого и пятого членов геометрической прогрессии равно 12. Частное от деления второго члена на четвёртый равно 3. Найдите второй член прогрессии.

Задача 3. При каких x три числа $\lg x$, $\lg(2^x-1)$ и $\lg(2^x+3)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию?

Задача 4. Найдите четыре действительных числа, первые три из которых образуют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую прогрессию, если сумма крайних членов равна 14, а сумма средних 12.

Задача 5 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 2003). Найдите знаменатель геометрической прогрессии с ненулевым первым членом и ненулевым знаменателем, если у неё сумма первых восемнадцати членов равна упятерённой сумме первых шести членов.

Задача 6 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 2001). Сумма первых четырёх членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии — натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

Задача 7 (геологический факультет МГУ, 2003). Целые числа k, n и m в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число m на 39 больше, чем k, а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел k, n и m?

Задача 8 (географический факультет МГУ, 1993). При каких значениях параметра a четыре корня уравнения

$$x^4 + (a-3)x^2 + (a+10)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Задача 9 (социологический факультет МГУ, 1998). Найдите все натуральные значения параметра n, при каждом из которых задача: «Найти арифметическую прогрессию, если известны её одиннадцатый член и сумма её первых n членов» не имеет решений, или её решением является бесконечное множество арифметических прогрессий.

Задача 10. Найдите трёхзначное число, цифры которого образуют (в том же порядке, в котором они расположены в числе) возрастающую арифметическую прогрессию и которое делится на 45.

К ГЛАВЕ 12. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Задача 1. Решите уравнение

$$11x + 7y = 3$$

в целых числах.

Задача 2. Найдите все пары натуральных чисел p и q, для которых выполняется равенство

$$4p^2 = q^2 - 9.$$

Задача 3. Решите в целых числах уравнение

$$15x^2 - 11xy + 2y^2 = 7.$$

Задача 4 (экономический факультет МГУ, 1984). Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg}(4\sin x) = \sqrt{3},$$

удовлетворяющие условию

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Задача 5 (факультет государственного управления МГУ, 2002). Найдите на плоскости Oxy наименьшее расстояние между двумя точками с координатами (x,y), такими, что x и y являются целыми числами и удовлетворяют уравнению

$$9 \cdot \frac{y}{x} - \frac{x}{y} + \frac{55}{xy} = 0.$$

Задача 6 (факультет государственного управления МГУ, 2002). Брокерская фирма выставила на торги акции двух компаний: нефтяной компании — по 100 долларов за акцию и газовой компании — по 65 долларов за акцию. Всего было 200 акций. Все акции газовой компании были проданы, а часть акций нефтяной компании осталась непроданной. Общая сумма выручки оказалась равной 13120 долларов. Найдите сумму выручки, полученную за акции газовой компании.

К ГЛАВЕ 13. ЗАДАЧИ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Задача 1 (экономический факультет МГУ, 1972). Найдите и изобразите на координатной плоскости точки, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} 18x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0, \\ 12y^2 - 2xy^2 + 3y^3 = 0. \end{cases}$$

Задача 2 (экономический факультет МГУ, 2001). На координатной плоскости заданы точки $A(9{,}1)$, $B(2{,}0)$, $D(1{,}5)$ и $E(9{,}7)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где C — точка пересечения прямых AD и BE.

Задача 3 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1996). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant -|x| - 1, \\ y \leqslant -2|x| + 3. \end{cases}$$

Задача 4 (экономический факультет МГУ, 1991). Найдите площадь плоской фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$(x^2 + y^2 - x - y) \cdot (x^2 + y^2 - 1) \leqslant 9.$$

Задача 5 (экономический факультет МГУ, 1988). Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости соотношением

$$2(2 - x) \geqslant |y - x^2| + |y + x^2|.$$

Задача 6 (факультет государственного управления МГУ, 2002). Найдите все значения b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| + 3\sqrt{y|y|} - 6)(3|x| + |y| - 18) = 0, \\ x^2 + (y + b)^2 = 100 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

К ГЛАВЕ 14. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Задача 1 (факультет государственного управления МГУ, 2003). В прямоугольном треугольнике ABC проведён отрезок CK, соединяющий вершину прямого угла с точкой K на гипотенузе AB так, что длины отрезков BK, CK и AK различны и образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, причём $CK = 2$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 3$.

Задача 2 (факультет психологии МГУ, 1980). В треугольнике ABC угол A — прямой. Величина угла B равна $30°$. В треугольник вписана окружность, радиус которой равен $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины C до точки касания этой окружности с катетом AB.

Задача 3 (черноморский филиал МГУ (г. Севастополь), 1999). В треугольнике ABC со сторонами $AB = \sqrt{6}$, $BC = \sqrt{3}$, $AC = 3$ проведена медиана BD. В треугольники ABD и DBC вписаны окружности, которые касаются BD в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка MN.

Задача 4 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 2003). Высота правильного треугольника ABC со стороной $\sqrt{3}$ совпадает с медианой прямого угла прямоугольного треугольника DEF, углы которого составляют геометрическую прогрессию. При каком взаимном расположении треугольников ABC и DEF площадь их общей части окажется наименьшей? Найдите эту площадь.

Задача 5 (факультет психологии МГУ, 1999). Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Длины противоположных сторон AB и CD равны соответственно 9 и 4, $AC = 7$, $BD = 8$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

Задача 6 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 2003). Про четырёхугольник $PQRS$ известно, что его площадь равна 4, $PQ = QR = 3\sqrt{2}$, $RS = SP$, а вершина S лежит на окружности радиуса $\sqrt{2}$, вписанной в угол PDR. Найдите величину угла PDR.

Задача 7 (факультет государственного управления МГУ, 2002). На окружности радиуса 3, описанной около правильного треугольника, взята точка E. Известно, что расстояние от точки E до одной из вершин треугольника равно 5. Найдите разность расстояний от точки E до двух других вершин треугольника.

Задача 8 (факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ, 1980). В прямоугольном треугольнике ABC из вершины

B прямого угла опущена высота BD на гипотенузу AC. Известно, что $|AB| = 13$, $|BD| = 12$. Найдите площадь треугольника ABC.

Задача 9 (черноморский филиал МГУ (г.Севастополь), 2000). В выпуклом четырёхугольнике $KLMN$ диагонали KM и LN пересекаются в точке P. Площади треугольников KLP и MNP равны. Найдите угол LMK, если в треугольнике KPN задано отношение сторон $KP : PN : KN = 6 : 5 : 7$.

Задача 10 (экономический факультет МГУ, отделение менеджмента, 1999). В параллелограмме $ABCD$ ($AB \| CD$) диагонали

$$AC = c, \quad BD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,c.$$

Найдите площадь параллелограмма, если $\angle CAB = 60^\circ$.

К ГЛАВЕ 15. БОЛЕЕ ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Задача 1. При каком значении параметра a система неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant (x-a)^2, \\ x \geqslant (y-a)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Задача 2 (физический факультет МГУ, 1981). Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задача 3 (институт стран Азии и Африки МГУ, 1991). При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = b \end{cases}$$

имеет ровно три решения?

Задача 4 (факультет государственного управления МГУ, 2002). Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (3\sqrt{x|x|} + |y| - 3)(|x| + 3|y| - 9) = 0, \\ (x-a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Задача 5 (факультет почвоведения МГУ, 1994). При каких значениях параметров a и b система неравенств

$$\begin{cases} a + \sin bx \leqslant 1, \\ x^2 + ax + 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Задача 6 (геологический факультет МГУ, 1996). Найдите все значения параметра a, при которых для любого b уравнение

$$\cos(b + ax + bx) + 2\cos xb^2 = 3a^2$$

имеет хотя бы одно решение.

Задача 7 (геологический факультет МГУ, 1999). Найдите наибольшее из значений параметра a, при которых уравнение

$$\log_7\left(\left|9^x + 49^x + \frac{a21^x}{\sqrt{7}}\right| + 1\right) = 0$$

имеет решение.

Задача 8 (черноморский филиал МГУ (г. Севастополь), 2000). При каких a и b неравенство

$$b < 5^{\frac{2x+1}{4x^2+4x+5}} \leqslant a$$

выполняется для всех действительных значений x?

Задача 9 (экономический факультет МГУ, 1994). Предприятие производит детскую обувь и является убыточным. Известно, что при изготовлении m пар обуви в месяц расходы предприятия составляют не менее

$$\frac{12600}{m} - \left|3 - \frac{54000}{m}\right|$$

тыс. руб., а цена реализации каждой пары обуви при этом не превосходит

$$18 - \frac{m}{4000}$$

тыс. руб. Определить ежемесячный объём производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключён.

Задача 10 (черноморский филиал МГУ (г. Севастополь), 2003). Найдите такие числа a и b, что при всех значениях x справедливо равенство

$$(x^2 + 5x + 6)(x + a) = (x^2 - 9)(x + b).$$

ОТВЕТЫ

К ГЛАВЕ 1. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Ответ к заданию 1. $x_1 = -2,\ x_2 = -2/3.$

Ответ к заданию 2. $x_1 = -8,\ x_2 = 10.$

Ответ к заданию 3. $x = 9/4,\ x \geqslant 6.$

Ответ к заданию 4. $x_1 = -\dfrac{38}{9}, \quad x_2 = \dfrac{46}{5}.$

Ответ к заданию 5. $-\dfrac{11}{3} \leqslant x \leqslant \dfrac{8}{3}.$

Ответ к заданию 6. $x > 1.$

Ответ к заданию 7. $-6 \leqslant x \leqslant -1, \quad x \geqslant 0.$

Ответ к заданию 8. $\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2} < x < -3,\ -3 < x < -2,$ $x > 1.$

Ответ к заданию 9. $x \geqslant -\dfrac{1}{2}.$

Ответ к заданию 10. $x \leqslant -\dfrac{5}{2}, \quad -\dfrac{8}{5} \leqslant x \leqslant 0.$

Ответ к заданию 11. $x = -4.$

К ГЛАВЕ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Ответ к заданию 1.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = \frac{-2-\sqrt{66}}{2}, \quad x_4 = \frac{-2+\sqrt{66}}{2}.$$

Ответ к заданию 2. $x_1 = 2, \quad x_2 = \dfrac{1}{2}.$

Ответ к заданию 3. $x < -\sqrt{2},\ x > \sqrt{2}.$

Ответ к заданию 4. $x < 0, \quad \dfrac{2}{3} \leqslant x < 1.$

Ответ к заданию 5. $1 \leqslant x \leqslant 3$.

Ответ к заданию 6. $x = 3, \quad -1 < x < 1, \quad -7 < x < -5$.

Ответ к заданию 7. $0 < x \leqslant 6$.

Ответ к заданию 8. $-1 - \sqrt{8} \leqslant x < -3, \quad 1 < x \leqslant 3$.

Ответ к заданию 9. $-2 \leqslant x \leqslant -1, \quad 3 < x < 4$.

Ответ к заданию 10. $-8 < x < -6, \quad -6 < x < -1$.

К ГЛАВЕ 3. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С РАДИКАЛАМИ

Ответ к заданию 1. $x = 1 - \sqrt{2}$.

Ответ к заданию 2. $x = 3$.

Ответ к заданию 3. $x_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ к заданию 4. $x = 0$.

Ответ к заданию 5. $y_1 = -3, \quad y_2 = 2$.

Ответ к заданию 6. $x = -\dfrac{1}{3}$.

Ответ к заданию 7. $-4 \leqslant x < 0$.

Ответ к заданию 8. $u > \dfrac{25 - \sqrt{433}}{32}$.

Ответ к заданию 9. $-1 < x < 0, \quad 1 < x < 4$.

Ответ к заданию 10. $\dfrac{1-\sqrt{17}}{8} < x \leqslant 1, \quad x \geqslant 3$.

Ответ к заданию 11. $x = 7$.

К ГЛАВЕ 4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Ответ к заданию 1. $x = 1, \quad y = -1$

Ответ к заданию 2. решений нет.

Ответ к заданию 3. $x = 2{,}5 - 3t, \quad y = t$, где t — любое действительное число.

Ответ к заданию 4. $x = 5, \quad y = -2$.

Ответ к заданию 5. $x = \dfrac{5}{2}, \quad y = -\dfrac{5}{2}$.

Ответ к заданию 6. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Ответ к заданию 7. $x_1 = 2, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = -1, \quad y_2 = -2.$

Ответ к заданию 8. $x_1 = 6, \quad y_1 = 9; \quad x_2 = 9, \quad y_2 = 6.$

Ответ к заданию 9. $x_1 = 2, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = -1, \quad y_2 = -2.$

К ГЛАВЕ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Ответ к заданию 1. $(-1)^n \arcsin \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 2. $x = \dfrac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 3. $(-1)^n + \dfrac{\pi}{5}n, \quad n \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 4. $\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{32} + \dfrac{\pi k}{8}, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 5. $\dfrac{(-1)^n}{5} \arcsin(\sqrt{13}-3) + \dfrac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 6. $\operatorname{arctg} \dfrac{7}{11} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 7. $\pm\dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{2\pi n}{5}, \quad n \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 8. $\operatorname{arctg} \dfrac{5}{6} + (-1)^n \arcsin \dfrac{4}{\sqrt{61}} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 9. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad -\operatorname{arctg} \dfrac{1}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 10. $\dfrac{\pi}{4} + m\pi, \ m \in \mathbf{Z}; \ -\operatorname{arctg} \dfrac{1}{3} + \pi k, \ k \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 11. $\dfrac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 12. $\dfrac{\pi m}{5}, \quad m \in \mathbf{Z}; \quad \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 13. $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}; \quad (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 14. $\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}; \quad -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 15. $\arccos \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 16. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 17. $\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi - 2\pi k\right), \quad k \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 18. $x = \frac{\pi m}{2}, \quad y - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}; \quad m, k \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 19. $\frac{3\pi}{2} + 2\pi p, \quad p \in \mathbf{Z}.$

Ответ к заданию 20. $14 - 4\pi.$

Ответ к заданию 21. $-\frac{\pi}{14}, \quad \frac{\pi}{14}.$

К ГЛАВЕ 6. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

Ответ к заданию 1. Если $a = 3$, то x — любое число, если $a \neq 3$, то $x = a - 3$.

Ответ к заданию 2. Если $a = -1$, то x — любое число, если $a = 1$, то уравнение решений не имеет, если $a \neq \pm 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$.

Ответ к заданию 3. Если $a = 0$, то таких x не существует, если $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{4}$.

Ответ к заданию 4. Если $a < -\frac{3}{2}$, то решений нет, если $a \geqslant -\frac{3}{2}$, то $x = 4a^2 + 12a + 5$.

Ответ к заданию 5. Если $a < -1$, то $x = -\frac{1}{1+a}$,
если $-1 \leqslant a < 1$, то решений нет,
если $a = 1$, то $x \geqslant 0$,
если $a > 1$, то $x = \frac{1-a}{a^2+1}$.

Ответ к заданию 6. Если $a \leqslant -1$, то решений нет,
если $a > 1$, то $x \geqslant \sqrt{\frac{2}{a+1}}, \quad x \leqslant -\sqrt{\frac{2}{a+1}}$.

Ответ к заданию 7. Если $a < 4$, то $3 \leqslant x < \frac{(a-5)^2}{(a-4)^2} + 3$,
если $4 \leqslant a < 5$, то $x \geqslant 3$,
если $a \geqslant 5$, то $x > \frac{(a-5)^2}{(a-4)^2} + 3$.

Ответ к заданию 8. Если $a \leqslant -1$, то $a \leqslant x \leqslant -a$,
если $-1 \leqslant a \leqslant -1/2$, то $-\sqrt{-2a-1} \leqslant x \leqslant \sqrt{-2a-1}$,
если $a > -\frac{1}{2}$, то решений нет.

Ответ к заданию 9. $a = -2$.

Ответ к заданию 10. $a \geqslant \dfrac{3}{2}$.

К ГЛАВЕ 7. КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН И ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Ответ к заданию 1. $a = -1, \quad a \leqslant \dfrac{4 - 2\sqrt{13}}{2}, \quad a \geqslant \dfrac{4 + \sqrt{13}}{2}$.

Ответ к заданию 2. При $a < 0$ решений нет,
при $a = 0$ уравнение имеет 2 решения,
при $0 < a < 4$ уравнение имеет 4 решения,
при $a = 4$ уравнение имеет 3 решения,
при $a > 4$ уравнение имеет 2 решения.

Ответ к заданию 3. При $0 \leqslant a < \dfrac{4}{61}$.

Ответ к заданию 4. При $a = 0$ и $a = 1$.

Ответ к заданию 5. При $a = 2$ и $a = -2$.

Ответ к заданию 6. Условию удовлетворяют все $5 < a < 7$.

Ответ к заданию 7. При $a < -6$ уравнение решений не имеет,
при $-6 \leqslant a < -5$ оба корня отрицательны,
при $a = -5$ один корень отрицателен, другой равен 0,
при $-5 < a < 3$ корни имеют разные знаки,
при $a = 3$ уравнение имеет один положительный корень,
при $3 < a \leqslant 4$ оба корня положительны.

Ответ к заданию 8. $a > 0$.

Ответ к заданию 9. При $0 < a \leqslant 3 - \sqrt{2}$ и $a \geqslant 2\sqrt{2} + 3$.

Ответ к заданию 10. $b \geqslant \dfrac{3}{4}$.

Ответ к заданию 11. Для $a \leqslant 20$.

К ГЛАВЕ 8. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Ответ к заданию 1. $x = 2$.

Ответ к заданию 2. $x_1 = 0, \ x_2 = 2$.

Ответ к заданию 3. $y_1 = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2}, \quad y_2 = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Ответ к заданию 4. $x = \dfrac{1}{\log_{3/2} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Ответ к заданию 5. $\dfrac{1}{1-\log_4 5}$.

Ответ к заданию 6. $x_1 = 0, \quad x_2 = -3 - \log_5 3$.

Ответ к заданию 7. $x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = -1$.

Ответ к заданию 8. $x \leqslant \log_2 5$.

Ответ к заданию 9. $x < 0$.

Ответ к заданию 10. $x < \log_2 5 - 1, \quad x \geqslant \log_2 7 - 1$.

Ответ к заданию 11. $x = 1, \quad y = 1$.

К ГЛАВЕ 9. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Ответ к заданию 1. $x = 3$.

Ответ к заданию 2. $x = \sqrt{17} - 4$.

Ответ к заданию 3. $x = 8$.

Ответ к заданию 4. $x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ к заданию 5. $x = 3$.

Ответ к заданию 6. $x > \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ к заданию 7. $-1 < x < 0, \quad 0 < x < 4$.

Ответ к заданию 8. $\log_2 49 - 4 < x < \log_2 7$.

Ответ к заданию 9. $2 < x \leqslant \dfrac{7+\sqrt{17}}{4}$.

Ответ к заданию 10. $x \geqslant \dfrac{4}{5}$.

Ответ к заданию 11. $-6 \leqslant x < -4, \quad 2\sqrt{2} < x < 3$.

Ответ к заданию 12. $x_1 = 5, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = \dfrac{1}{5}, \quad y_2 = 2$.

К ГЛАВЕ 10. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Ответ к заданию 1. $1/15$.

Ответ к заданию 2. 160 км.

Ответ к заданию 3. 8 часов.

Ответ к заданию 4. 5 литров.

Ответ к заданию 5. 14 красных карандашей и 19 синих карандашей.

Ответ к заданию 6. 27 детей.

К ГЛАВЕ 11. ПРОГРЕССИИ

Ответ к заданию 1. 192.

Ответ к заданию 2. $6, -6$.

Ответ к заданию 3. $x = \log_2 5$.

Ответ к заданию 4. $(2{,}4{,}8{,}12), (25/2{,}15/2{,}9/2{,}3/2)$.

Ответ к заданию 5. $q_1 = -1, q_2 = \sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}}, q_3 = -\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}}$.

Ответ к заданию 6. 119.

Ответ к заданию 7. 39.

Ответ к заданию 8. $a_1 = -7, a_2 = -\dfrac{109}{7}$.

Ответ к заданию 9. $n = 21$.

Ответ к заданию 10. 135.

К ГЛАВЕ 12. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

Ответ к заданию 1. $(6+7k, 1+3k) \in \mathbf{Z}$.

Ответ к заданию 2. $p = 2, q = 5$.

Ответ к заданию 3. $(13, 32),\ (-13, -32),\ (5, 6),\ (-5, -6)$.

Ответ к заданию 4. $\pi - \arcsin\dfrac{\pi}{12},\ \ \pi + \arcsin\dfrac{\pi}{6}$.

Ответ к заданию 5. 2.

Ответ к заданию 6. 4920 долларов.

К ГЛАВЕ 13. ЗАДАЧИ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Ответ к заданию 1. $\left(5, -\dfrac{2}{3}\right)$, $(0, -4)$ и все точки оси Ox.

Ответ к заданию 2. 33.

Ответ к заданию 3. 16.

Ответ к заданию 4. $\dfrac{\pi}{2} + 1$.

Ответ к заданию 5. 15.

Ответ к заданию 6. $-12, -8, 8$.

К ГЛАВЕ 14. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Ответ к заданию 1. $9\sqrt{5}/10$.

Ответ к заданию 2. $\sqrt{15 + 6\sqrt{3}}$.

Ответ к заданию 3. $\dfrac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{3})$.

Ответ к заданию 4. $15\sqrt{3}/32$.

Ответ к заданию 5. $1820\sqrt{21}/341$.

Ответ к заданию 6. $2\arcsin\dfrac{1}{3}\ \left(= \arccos\dfrac{7}{9}\right)$.

Ответ к заданию 7. 5.

Ответ к заданию 8. 202,8.

Ответ к заданию 9. $\arccos\dfrac{5}{7}$.

Ответ к заданию 10. $\dfrac{3 + \sqrt{3}}{8}c^2$.

К ГЛАВЕ 15. БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Ответ к заданию 1. $a = -\dfrac{1}{4}$.

Ответ к заданию 2. $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = -\sqrt{2}$.

Ответ к заданию 3. $b = \sqrt{2}$.

Ответ к заданию 4. $a_1 = -4, a_2 = 4, a_3 = 6$.

Ответ к заданию 5. $a = 2, b = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbf{Z}$, или $a = -2$, $b \in \mathbf{R}$.

Ответ к заданию 6. $a = -1$.

Ответ к заданию 7. $a = -2\sqrt{7}$.

Ответ к заданию 8. $a \geqslant 5^{1/4}, b < 5^{-1/4}$.

Ответ к заданию 9. 12 000, 24 000 пар обуви.

Ответ к заданию 10. $a = -3, b = 2$.

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК

Основная задача этого раздела — возобновить в памяти читателя набор известных понятий, формул и фактов, которые используются в предлагаемом пособии.

РАВНОСИЛЬНОСТЬ

О *равносильности* мы говорим в тех случаях, когда, проводя преобразования уравнения, неравенства, системы уравнений или системы неравенств, мы не теряем ни одного решения и не обогащаемся ни одним посторонним. Иными словами — *остаёмся при своих.*

К числу таящих опасности преобразований относятся, в частности:

- умножение на выражение, способное обратиться в нуль,
- деление на выражение, способное обратиться в нуль,
- возведение в квадрат,
- извлечение квадратного корня,
- приведение дробей к общему знаменателю,
- отбрасывание общего знаменателя без анализа его знака,
- логарифмирование и обратное ему потенцирование.

ОБЛАСТЬ ДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ (ОДЗ)

Под *областью допустимых значений*, или, коротко, *ОДЗ*, понимается множество всех значений неизвестной, при которых каждое из выражений, входящих в изучаемое уравнение, неравенство, систему уравнений или систему неравенств, имеет смысл.

Переходя в ходе поиска решений от одних соотношений к другим, мы иногда говорим, что проводимые преобразования приводят к соотношениям, *равносильным в области допустимых значений* (*в ОДЗ*). Это означает, что при этом не теряется ни одно из значений неизвестной из числа тех, что входят в ОДЗ, и не возникает ни одного лишнего.

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Метод интервалов — это один из способов поиска решений уравнений и неравенств, содержащих многочлены первой степени вида

$$x-a,\quad x-b,\quad \ldots,$$

который основан на разбиении области допустимых значений на интервалы их знакопостоянства (в каждом из таких интервалов любое из выражений $x-a$, $x-b$, ... имеет один и тот же знак).

О ПАРАХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Наборы уравнений

$$\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0 \end{array}\right.$$

имеют совершенно разный смысл.

Решениями первой пары уравнений являются лишь такие значения неизвестной x, при которых

$$\text{и}\quad f(x)=0,\quad \text{и}\quad g(x)=0,$$

а решениями второй пары — любые значения неизвестной, для которых

$$\text{либо}\quad f(x)=0,\quad \text{либо}\quad g(x)=0.$$

Полезный пример. Условиям

$$\begin{cases} x^2+x-2=0, \\ x^2+3x-4=0 \end{cases}$$

удовлетворяет только одно значение неизвестной $x=1$, а тем же условиям, но связанным квадратной скобкой,

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x-2=0, \\ x^2+3x-4=0, \end{array}\right.$$

удовлетворяют три значения неизвестной — $x=1$, $x=2$ и $x=4$.

Аналогичными свойствами обладают пары неравенств

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \left[\begin{array}{l} f(x)>0, \\ g(x)>0, \end{array}\right.$$

решениями первой пары неравенств являются лишь такие значения неизвестной x, при которых

$$\text{и}\quad f(x)>0,\quad \text{и}\quad g(x)>0,$$

а решениями второй пары — любые значения неизвестной, для которых

$$\text{либо}\quad f(x)>0,\quad \text{либо}\quad g(x)>0.$$

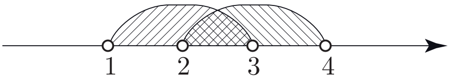


Рис. 2

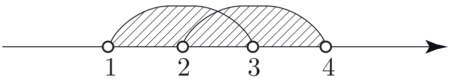


Рис. 3

Полезный пример. Условия

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ x^2 - 6x + 8 < 0 \end{cases}$$

выделяют на числовой оси интервал $2 < x < 3$ (рис. 2), а те же условия, но связанные квадратной скобкой,

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ x^2 - 6x + 8 < 0, \end{array} \right.$$

выделяют на числовой оси интервал $1 < x < 4$ (рис. 3).

АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА

Абсолютной величиной числа, его *модулем*, называется само это число (в случае, если оно положительно или равно нулю) или число, ему противоположное (если заданное число отрицательно) —

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Модуль любого числа или выражения неотрицателен.

СВОЙСТВА АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. $|-x| = |x|$.
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
3. Неравенство $|x| < a$ при положительном a равносильно двойному неравенству $-a < x < a$.
4. Неравенство $|x| \leqslant a$ при неотрицательном a равносильно двойному неравенству $-a \leqslant x \leqslant a$.
5. Неравенство $|x| > a$ при положительном a равносильно двум соотношениям $\left[\begin{array}{l} x < -a, \\ x > \ \ a. \end{array} \right.$

6. $x^2 = |x|^2$.
7. $\sqrt{x^2} = |x|$.
8. $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{если} \quad f(x) < 0. \end{cases}$

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Полный набор решений уравнения

$$\sin x = a \quad \text{при} \quad |a| \leqslant 1$$

описывается формулой

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad \text{где} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Полный набор решений уравнения

$$\cos x = a \quad \text{при} \quad |a| \leqslant 1$$

описывается формулой

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad \text{где} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Полный набор решений уравнения

$$\operatorname{tg} x = b$$

описывается формулой

$$x = \operatorname{arctg} b + \pi n, \quad \text{где} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Полный набор решений уравнения

$$\operatorname{ctg} x = b$$

описывается формулой

$$x = \operatorname{arcctg} b + \pi n, \quad \text{где} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Формулы приведения:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$
$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \ \operatorname{tg} y}$$

(формула справедлива, если определены $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} y$ и $\operatorname{tg}(x+y)$),

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

(формула справедлива, если определены $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$),

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\,, \quad 1+\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

(первая из формул справедлива при условии, что $\cos x \neq 0$, а вторая — при условии, что $\sin x \neq 0$),

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2},$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right),$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right),$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right).$$

$$
\begin{array}{lcr}
\sin\alpha \geqslant 0: & 2\pi n \leqslant \alpha \leqslant \pi + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z},\\
\sin\alpha \leqslant 0: & \pi + 2\pi n \leqslant \alpha \leqslant 2\pi + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z},\\
\cos\alpha \geqslant 0: & -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z},\\
\cos\alpha \leqslant 0: & \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{3}{2}\pi + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}.\\
\operatorname{tg}\alpha \geqslant 0: & \pi k \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, & k \in \mathbf{Z},\\
\operatorname{tg}\alpha \leqslant 0: & \dfrac{\pi}{2} + \pi k < \alpha \leqslant \pi + \pi k, & k \in \mathbf{Z},\\
\operatorname{ctg}\alpha \geqslant 0: & \pi k < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \pi k, & k \in \mathbf{Z},\\
\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 0: & \dfrac{\pi}{2} + \pi k \leqslant \alpha < \pi + \pi k, & k \in \mathbf{Z}.
\end{array}
$$

Арксинусом числа a, $-1 \leqslant a \leqslant 1$, называется число φ, подчинённое двум условиям

$$\sin\varphi = a \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\,.$$

Обозначение: $\arcsin a$.

Арккосинусом числа a, $-1 \leqslant a \leqslant 1$, называется число φ, подчинённое двум условиям

$$\cos\varphi = a \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$

Обозначение: $\arccos a$.

Арктангенсом числа b называется число φ, подчинённое двум условиям

$$\operatorname{tg}\varphi = b \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\,.$$

Обозначение: $\operatorname{arctg} b$.

Арккотангенсом числа b называется число φ, подчинённое двум условиям

$$\operatorname{ctg}\varphi = b \quad \text{и} \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Обозначение: $\operatorname{arcctg} b$.

ТЕОРЕМА ВИЕТА О КОРНЯХ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА

Если квадратный трёхчлен

$$ax^2 + bx + c$$

имеет корни x_1 и x_2 (возможно, совпадающие), то справедливы равенства

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}\,, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}\,. \end{cases}$$

КООРДИНАТЫ ВЕРШИНЫ ПАРАБОЛЫ

Абсцисса x_0 и ордината y_0 — вершины параболы, заданной уравнением

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{где} \quad a \neq 0,$$

вычисляются по формулам

$$x_0 = -\frac{b}{2a}\,, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}\,.$$

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

Показательная функция

$$f(x) = a^x$$

имеет содержательный смысл лишь при $a > 0$ и $a \neq 1$, определена при всех действительных значениях переменной x и принимает только положительные значения.

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$
$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y},$$
$$(a^x)^y = a^{xy},$$
$$a^x \cdot b^x = (ab)^x.$$

При $a > 1$ функция a^x монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывает.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

Логарифмом числа b $(b > 0)$ по основанию a $(0 < a \neq 1)$ называется такое число c, что

$$a^c = b,$$

или, что то же,

$$c = \log_a b.$$

Для любого числа a, подчинённого условию $0 < a \neq 1$, выполняются равенства

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{и} \quad \log_a a = 1.$$

Для любых чисел a и b, удовлетворяющих условиям

$$a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0,$$

выполняется *основное логарифмическое тождество*

$$a^{\log_a b} = b.$$

В приводимых ниже формулах основания логарифмов всюду положительны и отличны от 1:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc), \quad b > 0, \quad c > 0;$$
$$\log_a(bc) = \log_a |b| + \log_a |c|, \quad bc > 0;$$
$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}, \quad b > 0, \quad c > 0;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|, \quad bc > 0;$$
$$\log_a b^x = x \log_a b, \quad b > 0;$$
$$\log_{a^x} b = \frac{1}{x} \log_a b, \quad b > 0, \quad x \neq 0;$$
$$\log_a b^{2n} = 2n \log_a |b|, \quad b \neq 0, \quad n = 1,2, \ldots;$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

При $a > 1$ функция $\log_a x$ монотонно возрастает, а при $0 < a < 1$ — монотонно убывает.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Введём в произвольном треугольнике ABC (рис. 4) следующие удобные обозначения:

a, b и c — длины сторон BC, CA и AB треугольника,

$\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ — углы, противоположные сторонам BC, CA и AB соответственно,

h_c — высота, опущенная на сторону AB (рис. 5),

r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC,

R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Площадь S произвольного треугольника ABC можно вычислять по одной из формул

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \angle C, \quad S = \frac{1}{2} ch_c, \quad S = \frac{a+b+c}{2} r, \quad S = \frac{abc}{4R}.$$

Теорема синусов.

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R.$$

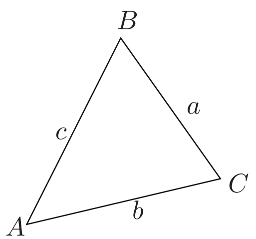


Рис. 4

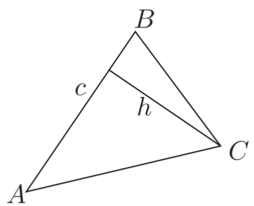


Рис. 5

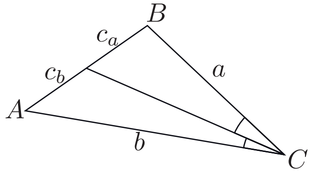


Рис. 6

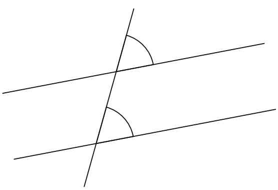


Рис. 7

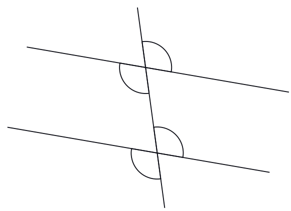


Рис. 8

Теорема косинусов.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C.$$

Теорема Пифагора. длины a и b катетов и длина c гипотенузы *прямоугольного* треугольника связаны равенством

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Свойство биссектрис. Биссектриса любого угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника (рис. 6),

$$\frac{c_a}{c_b} = \frac{a}{b}\,.$$

Свойство медиан. Медианы любого треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней на отрезки, длины которых относятся как $2:1$, считая от вершины.

Углы при параллельных прямых.

Соответствующие углы при параллельных прямых равны (рис. 7).

Накрестлежащие углы при параллельных прямых равны (рис. 8).

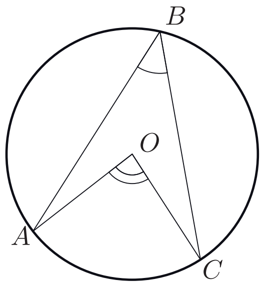


Рис. 9

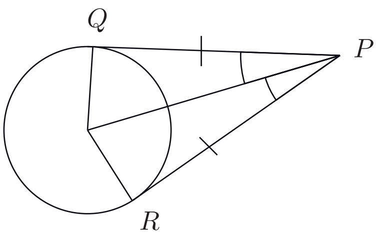


Рис. 10

Признаки подобия треугольников.

1. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

2. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, а прилежащие к этим углам стороны треугольника пропорциональны, то такие треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Углы в окружности.

Величина *вписанного угла* (угла, образованного двумя хордами, исходящими из одной точки окружности) равна половине величины *центрального* угла (угла, вершина которого совпадает с центром окружности), опирающегося на ту же дугу окружности (рис. 9),

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны (рис. 10),

$$PQ = QR.$$

Четырёхугольники.

Площадь S трапеции равна произведению полусуммы длин оснований на высоту,

$$S = \frac{AD + BC}{2}\,h$$

(рис. 11).

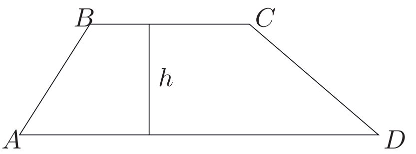


Рис. 11

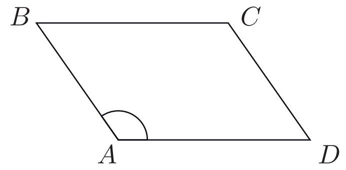


Рис. 12

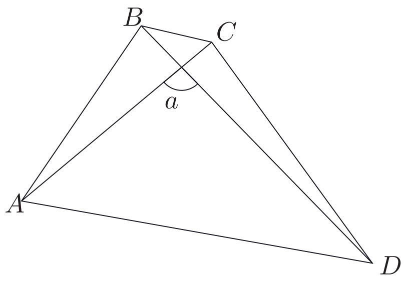


Рис. 13

Трапеция называется *равнобочной* (*равнобедренной*), если её боковые стороны равны.

Площадь S параллелограмма равна половине произведения длин его непараллельных сторон на синус угла между ними,

$$S = \frac{1}{2}\,(AB + AD)\sin\angle A$$

(рис. 12).

Площадь S произвольного выпуклого четырёхугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними,

$$S = \frac{1}{2}\,(AC + BD)\sin\alpha$$

(рис. 13).

КАК ВЕСТИ СЕБЯ ВО ВРЕМЯ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответить на этот вопрос в нескольких словах невозможно. И вот почему. Письменный экзамен представляет собой последний шаг в подготовительном марафоне, который был начат вами в тот самый момент, когда вы остановили свой выбор на данном учебном заведении.

После сделанного выбора вам пришлось затратить на подготовку к вступительным экзаменам значительное количество времени — прочесть множество книг, прорешать много примеров и задач. Это совершенно необходимая и довольно полезная работа.

И вот, наконец, наступает тот краткий промежуток времени, в течение которого вам нужно *показать себя*, причём показать с *лучшей* стороны.

А это дело очень непростое. Прежде всего потому, что показывать себя вам придётся в непривычной обстановке и ограниченных обстоятельствах. Здесь возможны всякие неожиданности. Мы не склонны драматизировать ситуацию, но за время проведения вступительных экзаменов приходилось видеть всякое.

Экзамен — это, конечно, стресс, воздействие которого на неискушенные в таких делах молодые организмы способно принимать самые разные формы. Поднимающееся волнение может привести к таким ошибкам, на которые в спокойной, а тем более в домашней обстановке вы просто не способны. Например, простейшая формула вдруг выпадает из памяти (а спросить-то не у кого!), скопление множества людей в сравнительно небольшом помещении во время экзамена может самым неожиданным образом подействовать на ваше самочувствие и др.

Можно ли этому хоть как-то противостоять? И если можно, то как именно?

Конечно, можно. И вот как.

Прежде всего — на экзамен нужно должным образом настроиться. Что это означает?

Непривычности ситуации, в которую вы погружаетесь во время вступительного экзамена, способна действенно противостоять в первую очередь ваша собранность, подкреплённая глубиной и основательностью ваших знаний. Они позволят вам максимально эффективно провести те несколько часов, которые отпущены на решение конкурсных задач. Конечно, чтобы показать знания, их нужно иметь. А чтобы показать то, что имеется, с лучшей стороны, обдумайте несколько полезных советов.

Совет 1-й: стоит ли ходить на консультации. При сдаче документов в приемную комиссию вы непременно должны узнать расписание экзаменов и предшествующих им консультаций, в частности, время проведения консультации по математике, а также то место, где будет проводиться письменный экзамен по математике, тот день и час, когда этот экзамен начнётся.

На консультацию сходите обязательно. Это полезно, по меньшей мере, по двум основным причинам: как правило, консультация проводится в одной из тех аудиторий, где будет проходить письменный экзамен (и вы сможете познакомиться с тем помещением, где через день-другой проведёте несколько трудных часов), и во время консультации принято рассказывать о том, как именно проходит экзамен (как заполняется титульный лист, что можно и чего нельзя писать на листах вкладыша, чем можно и чем нельзя пользоваться во время экзамена и т. п.). В результате часть событий, непременно случающихся во время письменного экзамена, уже не поразит вас своей необычностью.

Не забудьте также узнать, что необходимо взять с собой на экзамен, и проверьте перед выходом из дома в день экзамена наличие нужных документов (паспорта и экзаменационного листа), пишущих ручек и карандашей (в день экзамена это совсем не мелочи!).

Совет 2-й: как реагировать на обстановку во время проведения экзамена. Конечно, она будет довольно напряжённой. Но вы должны ясно представлять себе, что основная задача, стоящая перед экзаменаторами, находящимися в одной аудитории с вами, состоит в том, чтобы в течение всего времени, отпущенного на выполнение письменной работы, все абитуриенты находились в одинаковых обстоятельствах, т. е. чтобы никто никому не мешал, никто не был бы помещён в более комфортные условия (потому-то и списывание категорически запрещено, потому-то и экзаменаторы отвечают только на вопросы процедурного характера, следят за тем, чтобы аудитория хорошо проветривалась и т. п.).

Совет 3-й: о том, как выполнять экзаменационное задание. После заполнения титульного листа каждому абитуриенту выдаётся листок бумаги с задачами письменного экзамена. Именно с этого момента и начинается отсчёт времени, отпущенного на экзамен. С условиями всех предложенных задач (как правило, в варианте пять–семь задач) разумно ознакомиться в первые же минуты экзамена. После чего стóит хотя бы немного подумать над тем, с какой задачи начать. Лучше всего начинать с той, которая кажется вам самой простой.

Обычно в предлагаемом варианте задачи расположены так, что каждая последующая задача сложнее предыдущей. Но может оказаться, что для вас самой простой и лёгкой будет вторая или третья задача. Начинайте именно с неё: ищите решение, проверяйте и сразу же аккуратно переписывайте набело в чистовик. Задачи, помещенные в вариант, можно решать в любом порядке. В результате среди ещё не решённых вами задач останется на одну меньше. И вновь из этих оставшихся задач вы выбираете самую простую: ищите решение, проверяйте и сразу же аккуратно переписывайте набело в чистовик. Тем самым, количество ещё нерешённых задач сократится на две. А так как уже решённые вами задачи были простыми, то времени на поиск их решений потребовалось немного, и это даст вам столь необходимый резерв во времени, ход которого по мере приближения экзамена к концу почему-то убыстряется.

Может случиться, что задача, поначалу показавшаяся вам лёгкой, таковой не оказалась, и, потратив на поиск её решений некоторое время, вы начинаете понимать, что ничего не получается. Видимо, ваша первоначальная оценка сложности этой задачи была ошибочной, и потому разумнее всего отказаться от рассмотрения этой задачи хотя бы на время.

Ваша основная цель должна заключаться не в том, чтобы прорешать все задачи, а *в том, чтобы число верно решённых вами задач было как можно бо́льшим.*

Выбор задач из предложенного варианта в какой-то степени похож на то, как большинство из нас подходит к разгадыванию крестословицы (кроссворда): сначала мы вписываем в неё известные (лёгкие) слова, а затем, опираясь на некоторые из составляющих их букв, отыскиваем и другие, более трудные для нас.

Дело в том, что оценка за экзамен, как правило, определяется именно числом правильно решённых задач, независимо от того, насколько они трудны. И работа, в которой верно решены четыре сравнительно простые задачи, оценивается заметно выше, нежели работа, в которой решена одна, пусть даже и самая трудная, задача. К этому стоит добавить ещё, что мнение о том, является ли данная задача простой или сложной, зависит от того, насколько абитуриент готов к её разрешению, и потому нередко весьма субъективно.

Не нужно откладывать аккуратное выписывание найденных решений на потом — необходимость сделать это ближе к концу экзамена будет мешать при поиске решений ещё не разобранных вами задач. К тому же к концу экзамена накапливается усталость, и вы можете ошибиться с количеством времени, отпущенным для аккуратного выписывания уже решённых задач.

Ответ к каждой решённой вами задаче следует оформлять как можно более тщательно — это важный итог проделанной вами работы.

Зная, что допущенная ошибка часто бывает досадной, внимательно и неторопливо проверьте выписанное набело решение каждой задачи.

В заключение ещё раз повторим — *основная задача состоит в том, чтобы число верно решённых вами заданий было как можно бóльшим.*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Серия: «Поступаем в вуз»

Шикин Евгений Викторович
Григорян Александр Аркадьевич
Шикина Гузель Евгеньевна

СНАЧАЛА НЕМНОГО ПОДУМАЙТЕ

Пособие по математике для абитуриентов

Ведущий редактор *И. Маховая*
Художник *Ф. Мала*
Технический редактор *Е. Денюкова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Лапко* в пакете $\LaTeX\,2_\varepsilon$

Подписано к использованию 28.11.14. Формат 125×200 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru
http://www.Lbz.ru, http://e-umk.Lbz.ru, http://metodist.Lbz.ru

Школа уже позади, Вы собираетесь поступать в вуз, но понимаете, что предстоящий письменный экзамен по математике может оказаться для Вас не самым простым.

ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО ПРЕДЛАГАЕМАЯ КНИГА НАПИСАНА ИМЕННО ДЛЯ ВАС.

Авторы этого не совсем обычного пособия не просто стремятся научить читателя справляться с задачами вступительного экзамена, но стараются привить навыки спокойного, последовательного и систематического анализа заданных условий в каждой из них, с тем чтобы найти самый естественный путь к правильному ответу.

Даже такие непростые классы задач, как задачи с параметром или задачи с целыми числами, геометрические задачи на координатной плоскости и почти всегда нестандартные текстовые задачи, становятся совершенно прозрачными благодаря тому, что при подготовке к экзамену абитуриент сумел освоить используемые понятия и подходы на качественном уровне, а значит — обрёл столь необходимую уверенность в собственных силах.

Название книги раскрывает основную цель пособия — сконцентрировать внимание читателя на том, что к каждой задаче нужно подходить без парализующей боязни, строить её решение без спешки, не торопясь, отчётливо осознавая, что сначала всегда стоит немного подумать.